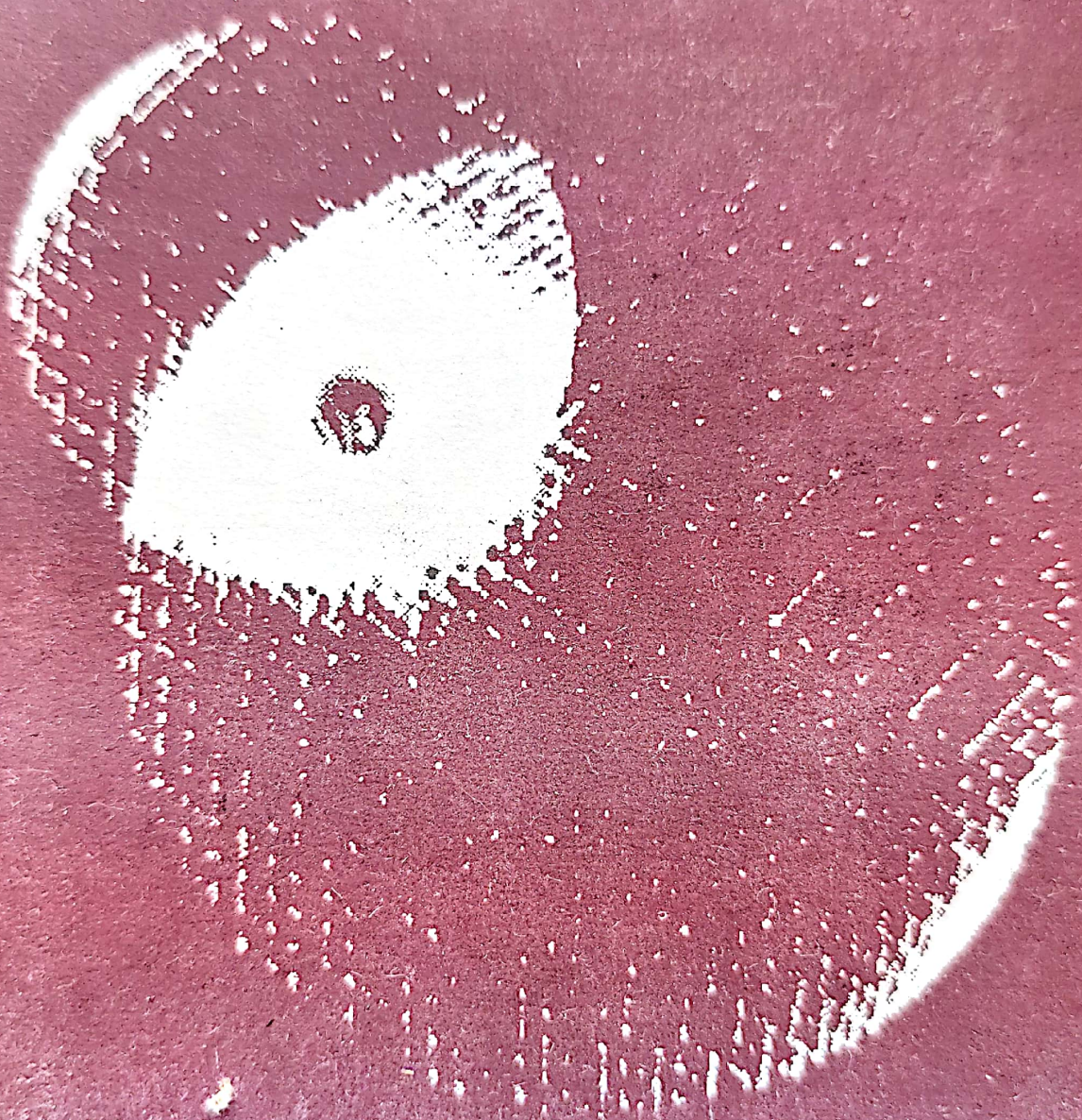


Coordonator științific: dr. Marcel Agop

GRAVITAȚIA



GRAPHIX

Coordonator științific: lector dr. Marcel Agop

GRAVITAȚIA

8 martie '93

Domnului Prof. Dr. Doc. Radu Mircea
Membru Corespondent al Academiei,
cu cele mai albe gânduri și sentimente,
împreună cu toate urările noastre
de bine și fericire

Mariana - Aura și C. Dariescu

Coperta: arh. Ioan Lupu

ISBN 973-95723-3-2

Coordonator științific: lector dr. Marcel Agop

Departamentul de Fizică, Institutul Politehnic "Gh.Asachi" Iași

GRAVITAȚIA

Pledoarie pentru o nouă teorie a spațiului și timpului

**Editura GRAPHIX
IAȘI - 1992**

CUPRINS

I. RELATIVITATEA EINSTEINIANĂ ÎNTRE ÎMPLINIRI ȘI EȘECURI

I.1 Măsurarea distanțelor în relativitate (N.Mazilu, M.Agop)	9
I.2 Relativitatea anizotropă (T.Horgoș, M.Agop)	10
I.3 Cesornicul și structura sa (M.Agop)	22
I.4 Semnificația forței și a potențialului în relativitatea generală. Unele observații asupra măsurătorilor în astronomie (N.Mazilu, M.Agop)	32
I.5 Unele observații asupra măsurătorilor de tip Coulomb (N.Mazilu, M.Agop)	52
Bibliografie	54

II. TEORII FIZICE ÎN BAZE CARTAN (M.Agop)

II.1 Elemente de geometrie diferențială în baze Cartan	56
II.2 Teorii gauge în baze Cartan	62
II.3 Teoria gravitației în baze Cartan	67
Bibliografie	72

III. TEORII FIZICE ÎN TOPOLOGIA $R \times S^3$

Argument (M.Agop)	73
III.1 Geometria varietăți $R \times S^3$ (Gh.Zet)	74
III.2 Teorii gauge pe varietate $R \times S^3$ (Gh.Zet)	78
III.3 Gravitația pe varietatea $R \times S^3$ (Gh.Zet)	80
III.4 Soluții exacte ale ecuațiilor Einstein pe varietatea $R \times S^3$ (C.Dariescu, A.Dariescu)	81
III.5 Model unificat pentru teoria gravitației și teoriile gauge pe varietatea $R \times S^3$ (Gh.Zet, C.Dariescu)	88
Bibliografie	103

IV. SUPERGRAVITAȚIA

IV.1 Superspații (A.Dariescu)	105
IV.2 Supercâmpuri (A.Dariescu)	107
IV.3 Construcția lagrangeenilor Supersimetrice (A.Dariescu)	109
IV.4 Ruperea spontană a supersimetriei (A.Dariescu)	111
IV.5 Teorii gauge supersimetrice (A.Dariescu)	114
IV.6 Supersimetria locală: Supergravitația (A.Dariescu, C.Dariescu)	115
Bibliografie	119

V. STRINGS ȘI SUPERSTRINGS (M.Piso)

V.1 Generalități	121
V.2 Stringuri clasice	123
V.3 Cuantificarea stringului clasic. Stringul bosonic	129
V.4 Stringul fermionic. Superstringul	133
V.5 Dezvoltări matematice și tendințe	136
V.6 Concluzii	139
Bibliografie	140

VI. TEORII FIZICE ÎN SPAȚII DEPENDENTE DE DIRECȚIE (M.Agop)

VI.1 Generalități	143
VI.2 Aproximația post-newtoniană în optica relativistă	144
VI.3 O aproximație post-newtoniană a metricii $g_{ij}(x, y) = e^{\sigma(x, y)} h_{ij}(x)$	150
VI.4 Electrodinamica clasică	153
VI.5 Concluzii preliminare	155
VI.6 Un posibil mecanism de generare a masei	156
Bibliografie	161

Argument

„De ce, în definitiv, **Gravitația - Pledoarie pentru o nouă teorie a spațiului și timpului?** Mai întâi, dintr-o *respectuoasă antipatie* față de Einstein. *Respectuoasă*: nu putem îndrăzni să ne așezăm în tradiția - inaugurată de marele El - cu Teoria Relativității Generale decât în postura discretă a unor autori minori. *Antipatie*: sîntem alergici^{*} la geometrizarea excesivă a spațiului, la extrapolarea nejustificată a interacției electromagnetice la alte tipuri de interacție etc. Căci realitatea este unică iar diversitatea modelelor infinită.

De fapt nu de-o construcție sistematică discutăm în aceste pagini ceea ce ar echivala cu: *O nouă teorie a gravitației*, ci de-o „tatonată acțiune pregătitoare” avînd ca finalitate *Pledoarie pentru o nouă teorie a spațiului și timpului*.

Un prim pas a fost făcut de M. Agop prin *Probleme de invarianță și haos în teoria mișcării*, Ed. Gh. Asachi, Iași, 1992. În această monografie se dă o extensie Relativității Restrînse prin „grefarea modelului gauge” pe „teoria invariantivă a mișcării”. Așa încît devine esențial ceea ce poate face sistemul fizic de la sine și nu ceea ce i se impune, de exemplu prin măsurătoare. Astfel interacția electromagnetică nu mai trebuie impusă, civilizațiile se pot „sincroniza” etc.

Relativitatea Generală a permis însă identificarea „spațiului” cu „materia”, genial exprimat prin ecuațiile:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Astfel geometria a impus realității fizice elementul metric:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

Ori o asemenea concepție suferă: cu mici excepții, în „materie” nu se poate defini o distanță. Să admitem, cu precauții suplimentare, că există totuși o asemenea posibilitate. Atunci dat *ds-ul* varietății se pot imagina încă o infinitate de legi distincte ale transportului paralel (Levi-Civita, Fermi-Walker etc.) - astfel spus se poate măsura oricum - ceea ce, evident, este absurd.

^{*} Parafrizare după *Minima Moralia* de Andrei Pleșu, Ed. Cartea Românească. 1983.

Aici Einstein iarăși surprinde: *impune paralelismul Levi-Civita prin condiționarea:*

$$T_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = 0 \quad (3)$$

asigurînd în acest fel univocitatea conexiunii $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$. Deci se impune acum o singură „cale” de măsură ... - și mai absurd. Și criticile ar putea continua: „întreaga experiență geometrică a arătat că expresia ds^2 -ului dă, în general, o informație locală și că puține sînt varietățile Riemanniene pentru care un ds local poate da o informație pentru întreaga varietate etc.”

În aceste condiții o singură soluție este posibilă:

- *alegerea ds -ului din considerente cu totul exterioare Relativității Generale (vezi Fundamente ale Fizicii Moderne, M.Agop și N.Mazilu, Ed.Junimea, Iași, 1989; Gh.Zet și alții - articole referitoare la varietatea $R \times S^3$);*
- *utilizarea ecuațiilor (1) pentru obținerea acelor „tensori masici” compatibili cu ds -ul ales; procedeul este numit „Soluții exacte ale ecuațiilor de câmp gravitaționale” (vezi Gh.Maftei, C.Dariescu, A.Dariescu - articole referitoare la această problemă);*
- *selectarea „tensorilor masici fizici”.*

Credem acum că avem suficiente argumente, în opinia noastră, de-a elabora o asemenea lucrare. În acest scop au mai colaborat:

- prof.dr.Gh.Zet
- cercetător N.Mazilu
- cercetător M.Piso
- cercetător T.Horgoș
- asistenți universitari: C.Dariescu și A.Dariescu

Mulțumim:

- prof.dr. I.Gottlieb pentru sprijinul permanent
- inginer L.Filip fără de care apariția acestei cărți n-ar fi fost posibilă
- inginer S.Cazacu și R.Asandei pentru tehnoredactarea deosebit de îngrijită.

De asemenea mulțumim Editurii GRAPHIX pentru interesul arătat în a publica o asemenea lucrare.

M.Agop

* Octav Onicescu, *Mecanică invariantivă și Cosmologie*, Ed.Academiei, 1974, p.80.

I. RELATIVITATEA EINSTEINIANĂ ÎNTRE ÎMPLINIRI ȘI EȘECURI

I.1 MĂSURAREA DISTANTELOR ÎN RELATIVITATE* (N.Mazilu, M.Agop)

Excluzînd cazurile rare cînd măsurătorile de lungime se pot face cu rigle rigide, acestea comportă totdeauna existența unei mișcări ordonate, de preferință periodică, ce joacă rolul unui ceasornic. Observația a fost mai întîi legată de bazele Teoriei Relativității Restrînse: distanța poate fi calculată cu ajutorul unui semnal luminos trimis și reflectat instantaneu în punctul a cărei distanță, față de origine, dorim s-o stabilim. Consemnînd momentul trimiterii și primirii semnalului după ce a fost reflectat, se găsește intervalul de timp în care lumina parcurge de două ori această distanță. Cunoscînd viteza luminii o putem deci calcula imediat.

O asemenea situație constituie însă o abstracție teoretică din mai multe puncte de vedere dacă supunem experimentul judecății fenomenologice.

Mai întîi trebuie să ne asigurăm constanța vitezei luminii pe tot parcursul său, în întregul interval de timp măsurat. Dacă de exemplu, între origine și punctul considerat se întîmplă ca spațiul să nu fie omogen pe intervalul de timp cît durează măsurătoarea, atunci condiția constanței vitezei luminii nu mai este satisfăcută. Determinarea distanței se face cu valoarea locală a vitezei luminii. Aceasta înseamnă că teoria relativistă nu poate fi valabilă la orice scară.

Să admitem totuși că sîntem prudenți, și am analizat într-un mod o vecinătate a originii reperului, asigurînu-ne că pentru intervale de timp suficient de mari nimic nu influențează propagarea luminii. În acest caz distanța iarăși nu se poate da totdeauna, din cauză că reflexia luminii nu poate fi la dispoziție în orice punct din acea vecinătate. Mai general reflexia

* N.Mazilu, M.Agop, *Lucrare nepublicată*

luminii se poate dovedi un fenomen imposibil pe vecinătatea considerată. De exemplu, în Electrodinamica Cuantică un fenomen localizabil ar putea fi producerea de perechi, la care am putea raporta o schemă analogă celei relativiste. Aici însă ne întâlnim cu o problemă în plus: în afară de faptul că semnalul de răspuns poate să nu fie de aceeași natură cu cel trimis, este posibil ca el sau să nu existe de loc, sau să fie transmis în altă direcție.

De asemeni, în cazul fericit când ambele semnale există, la punctul vizat, între recepționarea unuia și retransmisia celuilalt poate să existe un întreg lanț de fenomene, ceea ce face ca semnalul răspuns să fie retransmis cu întârziere, întârziere de care în originea reperului nu se poate ține, în general cont.

Rezultatele anterioare sugerează faptul că, dacă într-un reper cartezian dorim să stabilim o distanță, procedura și teoria trebuie să fie suficient de elastice pentru a accepta următoarele auxiliare:

- a) un semnal trimis din originea reperului;
- b) un semnal de răspuns de la punctul vizat, a cărui distanță vrem s-o stabilim;
- c) un ceasornic pentru marcarea momentelor de trimitere și primire a semnalelor.

Aceste două semnale pot să difere prin natura lor sau unul dintre ele poate să lipsească la modul real. Nu se poate presupune, de exemplu, că cineva anume de pe Pământ a putut provoca radiația emisă la un moment dat de un pulsar! Totuși ea poate fi analizată, generează anumite concluzii și ne dă o estimare a distanței.

Observațiile anterioare își vor găsi unele concretizări în relativitatea anizotropă.

I.2 RELATIVITATEA ANIZOTROPĂ (T.Horgoș, M.Agop)

Spre deosebire de marea majoritate a autorilor care consideră ipoteza că într-un punct pe o direcție dată viteza luminii în cele două sensuri este aceeași, Boltyanskiy [1], [2], [3], [4], [5] consideră că ele pot fi diferite și analizează unele consecințe care decurg din aceasta. Această situație cauzată de un câmp gravitațional este denumită anizotropie, denumire ce o vom păstra și noi.

În continuare prezentăm unele din rezultatele lui Boltyanskiy precum și unele contribuții originale [9], [11].

Relații de transformare locală a coordonatelor în relativitatea anizotropă

Pentru deducerea formulelor de transformare locală a coordonatelor, în cazul unidimensional, Boltyanskiy [5] utilizează metoda matriceală. Transformările între două sisteme de referință S_α și S_β se realizează, local, potrivit formulelor liniare:

$$\begin{aligned} dt_\alpha &= A dt_\beta + B dx_\beta \\ dx_\alpha &= C dt_\beta + D dx_\beta \end{aligned} \quad (1.1)$$

cu coeficienți care depind de alegerea sistemelor de referință.

În sistemul S_β mișcarea este descrisă printr-o relație de forma $x_\beta = \varphi(t_\beta)$ iar $v_\beta = \frac{dx_\beta}{dt_\beta}$ este viteza acestei mișcări. Viteza mișcării în S_α este

$$v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{C + D v_\beta}{A + B v_\beta} \quad (1.2)$$

Boltyanskiy consideră invariante vitezele luminii σ și ρ în cele două sensuri pe direcția considerată. Astfel rezultă:

$$\sigma = \frac{C + D \sigma}{A + B \sigma} \quad \rho = \frac{C + D \rho}{A + B \rho} \quad (1.3)$$

Suplimentar consideră perechea de puncte corespondente $(v, 0)$ unde v este viteza lui S_β față de S_α ($V_\beta = 0$), adică:

$$v = \frac{C}{A} \quad (1.4)$$

Din setul de ecuații liniare (1.3), (1.4) se obțin:

$$B = -\frac{v}{\sigma \rho} A \quad C = vA \quad D = \left[1 - v \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho} \right) \right] A \quad (1.5)$$

respectiv determinantul transformării (1.1):

$$D = A^2 \left(1 - \frac{v}{\sigma} \right) \left(1 - \frac{v}{\rho} \right) \quad (1.6)$$

Se reține cazul $D = 1$, ceea ce este echivalent cu coincidența scalelor în sistemele de referință S_α și S_β [1].

Cu aceste considerații formulele de transformare locală a coordonatelor obținute sînt:

$$dt_{\alpha} = \frac{dt_{\beta} - \frac{v}{\sigma \rho} dx_{\beta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)}} \quad (1.7)$$

$$dx_{\alpha} = \frac{v dt_{\beta} + \left[1 - v\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right)\right] dx_{\beta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)}} \quad (1.8)$$

De asemenea în (1.1) autorul obține relația:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho} \quad (1.9)$$

unde v' este viteza relativă a lui S_{σ} față de S_{ρ} .

În cazul particular, izotrop, adică $\sigma = -\rho = C$, relațiile se transformă în relațiile Lorentz-Einstein, iar din (1.9) obținem $v = -v'$.

Forma:

$$-\rho \sigma dt^2 + (\sigma + \rho) dx dt - dx^2 \quad (1.10)$$

se demonstrează a fi invariantă față de transformările (1.7), (1.8). Cu notațiile $C = \frac{\sigma - \rho}{2}$, $f = \frac{\sigma + \rho}{2}$, invariantul (1.10) devine:

$$C^2 dt^2 - (dx - f dt)^2 = inv \quad (1.11)$$

În ceea ce privește generalizarea la cazul tridimensional, în [5] Se obține invariantul:

$$C^2 dt^2 - (dx_1 - f_1 dt)^2 - (dx_2 - f_2 dt)^2 - (dx_3 - f_3 dt)^2 = inv \quad (1.12)$$

Deducerea relațiilor de transformare cu metoda radar.*

Una din metodele de deducere a transformărilor Lorentz-Einstein din relativitatea restrînsă este bazată pe definirea distanțelor și duratelor cu ajutorul semnalelor luminoase [6], [7], [8], cunoscută și sub numele de

* T.Horgos, M.Agop, *Lucrare nepublicată*

metoda radarului.

În [9] se obțin relațiile de transformare locală a coordonatelor din relativitatea anizotropă utilizând metoda radarului.

Să considerăm acum două sisteme de referință S_α și S_β în mișcare relativă și să analizăm evenimentele în cazul unidimensional pe direcția comună $Ox_\alpha - Ox_\beta$. Fie doi observatori α și β imobili în originile celor două sisteme.

Semnale luminoase trimise de α la intervale de timp T (după orologiul său) ajung în β la intervale de timp $K_\alpha T$ (după orologiul din β).

Pe baza ideii de anizotropie a lui Boltyanskiy considerăm că semnale trimise de β la intervale de timp T' (după orologiul din β) ajung în α la intervale de timp $K_\beta T'$ (după orologiul din α). Factorii K_α și K_β constituie baza metodei radar în cazul anizotrop.

Dacă presupunem că primul semnal luminos este trimis de α către β în momentul când sistemele de referință S_α și S_β coincid, al doilea semnal trimis de α la momentul T se reîntoarce după reflexia de către β în α la momentul $K_\beta K_\alpha T$, deci după orologiul din α după intervalul de timp $(K_\beta K_\alpha - 1)T$.

Considerînd că vitezele luminii în cele două sensuri σ și ρ nu depind de coordonate și timp, conform observațiilor lui α timpul t_1 necesar luminii de la α la β diferă de cel necesar t_2 de la β la α . În consecință avem:

$$(K_\beta K_\alpha - 1)T = t_1 + t_2 \quad t_1 \sigma = t_2 |\rho|$$

de unde rezultă:

$$t_1 = \frac{(K_\beta K_\alpha - 1)}{1 + \frac{\sigma}{|\rho|}} \quad t_2 = \frac{\sigma}{|\rho|} \frac{(K_\beta K_\alpha - 1)T}{1 + \frac{\sigma}{|\rho|}} \quad (I.13)$$

Distanța $\alpha\beta$ în momentul reflexiei este:

$$S = \sigma t_1 = |\rho| t_2 = \frac{\sigma (K_\beta K_\alpha - 1)T}{1 + \frac{\sigma}{|\rho|}} \quad (I.14)$$

Momentul reflexiei celui de-al doilea semnal în β conform orologiului din 2 este:

$$T + t_1 = \frac{T \frac{\sigma}{|\rho|} + K_\beta K_\alpha T}{1 + \frac{\sigma}{|\rho|}} \quad (I.15)$$

În continuare fie două sisteme de referință S_α și S_β în mișcare relativă avînd originile temporale astfel alese încît $t=t'=0$ cînd originile O și O' coincid. Observatorii α și β din aceste sisteme înregistrează același eveniment. La momentul $t_{1\alpha}$ observatorul α (după orologiul său) trimite un semnal luminos către β care îl recepționează la momentul $t_{1\beta}$ (după orologiul său). Semnalul trimis de α este însoțit mai departe de un semnal trimis de β în momentul recepției semnalului primit de la α . Fie evenimentul P care constă în sosirea acestui dublu semnal într-un punct de unde este reflectat. El întâlnește mai întîi β la momentul $t_{2\beta}$ care și el trimite un semnal luminos spre α . Acest dublu semnal luminos este receptat de la momentul $t_{2\alpha}$.

Conform metodei radar, în cazul anizotrop descris anterior coordonatei lui P , după observațiile lui α , sînt:

$$t_\alpha = t_{1\alpha} + \frac{t_{2\alpha} - t_{1\alpha}}{1 + \frac{\sigma}{|\rho|}} \quad (I.16)$$

$$x_\alpha = \sigma \frac{t_{2\alpha} - t_{1\alpha}}{1 + \frac{\sigma}{|\rho|}} \quad (I.17)$$

de unde se obțin:

$$t_{1\alpha} = t_\alpha - \frac{x_\alpha}{\sigma} \quad t_{2\alpha} = t_\alpha + \frac{x_\alpha}{|\rho|} \quad (I.18)$$

Analog pentru observațiile lui β se obțin:

$$t_{1\beta} = t_\beta - \frac{x_\beta}{\sigma} \quad ; \quad t_{2\beta} = t_\beta + \frac{x_\beta}{|\rho|} \quad (I.19)$$

Conform definiției factorilor K_α și K_β avem:

$$t_\beta - \frac{x_\beta}{\sigma} = K_\alpha \left(t_\alpha - \frac{x_\alpha}{\sigma} \right) \quad (I.20)$$

$$t_\alpha + \frac{x_\alpha}{|\rho|} = K_\beta \left(t_\beta - \frac{x_\beta}{|\rho|} \right)$$

Acum alegem două evenimente infinit vecine P_1 și P_2 văzute de observatorul α , astfel că observatorul β trece prin punctul evenimentului P_1 în momentul realizării lui. Coordonatele atribuite lui P_1 de către α sînt (t_α, x_α) , iar de către β $(t_\beta, 0)$. Coordonatele atribuite lui P_2 sînt:

$$\alpha(t_\alpha + dt_\alpha; x_2 + dx_2)$$

$$\beta(t_\beta + dt_\beta; dx_\beta)$$

Pe baza relațiilor (I.20) pentru aceste două evenimente obținem:

$$(P_1) \quad t_\beta = K_2 \left(t_2 - \frac{x_\alpha}{\sigma} \right)$$

$$t_\alpha + \frac{x_\alpha}{|\rho|} = K_\beta t_\beta$$

$$(P_2) \quad t_\beta + dt_\beta - \frac{dx_\beta}{\sigma} = K_\alpha \left(t_\alpha + dt_\alpha - \frac{x_\alpha + dx_\alpha}{\sigma} \right)$$

$$t_\alpha + dt_\alpha + \frac{x_\alpha + dx_\alpha}{|\rho|} = K_\beta \left(t_\beta + dt_\beta + \frac{dx_\beta}{|\rho|} \right)$$

de unde prin scădere:

$$\begin{aligned} dt_\beta - \frac{dx_\beta}{\sigma} &= K_\alpha \left(dt_\alpha - \frac{dx_\alpha}{\sigma} \right) \\ dt_\alpha + \frac{dx_\alpha}{|\rho|} &= K_\beta \left(dt_\beta + \frac{dx_\beta}{|\rho|} \right) \end{aligned} \quad (I.21)$$

Relațiile (I.21) pot fi utilizate pentru explicitarea produsului $K_\beta K_\alpha$.

Dacă $dx_\beta = 0$, obținem:

$$K_\beta K_\alpha = \frac{1 + \frac{v}{|\rho|}}{1 - \frac{v}{\sigma}} \quad (I.22)$$

Dacă $dx_\alpha = 0$, rezultă:

$$K_\alpha K_\beta = \frac{1 - \frac{v'}{\sigma}}{1 + \frac{v'}{|\rho|}} \quad (I.23)$$

unde v este viteza relativă a lui S_β față de S_α , iar v' este viteza relativă a lui S_α față de S_β .

Din cele două expresii ale lui $K_\alpha K_\beta$ regăsim relația (I.9) dintre vitezele relative obținută de Boltyanskiy pe altă cale.

Din (I.22) și (I.23) rezultă soluția:

$$K_\alpha = K_\beta = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{|\rho|}}{1 - \frac{v}{\sigma}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v'}{\sigma}}{1 + \frac{v'}{|\rho|}}} \quad (I.24)$$

Folosind relațiile (I.21) și (I.24) obținem formulele de transformare (I.7) și (I.8), locală, a coordonatelor de tip Boltyanskiy.

Găurile negre și quasarii în relativitatea anizotropă.

În [2] este analizat cazul unui corp de masă m , fixat în originea sistemului de referință. În cele ce urmează se omite indicele care reprezintă sistemul de referință și sînt folosiți doar indicii care desemnează coordonatele.

Viteza oricărei mișcări este limitată de inegalitatea $\rho \leq v \leq \sigma$, adică $f - c \leq v \leq f + c$. Folosind parametru $u = v - f = \dot{x} - f$ și considerînd că funcția de anizotropie depinde de coordonata x , $f = f(x)$ obținem relația:

$$\dot{x} = f(x) + u \quad |u| \leq c \quad (I.25)$$

În felul acesta studiarea mișcărilor posibile în sistemul de referință prezentat conduce la situația întîlnită în teoria proceselor optimale sub denumirea de obiect comandat [10]. Propagarea luminii se face după traiectoria optimă (în sens de timp optimal) a obiectului comandat (I.25).

Se consideră că vectorul f în punctul $x = (x_1, x_2, x_3)$ este orientat către originea sistemului de referință și are mărimea $\gamma m |x|^{-2}$ unde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, iar γ este o constantă.

Relația (I.25) capătă cu aceste considerații următoarea formă:

$$\dot{x}_i = -\gamma m x_i |x|^{-3} + u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad |u| \leq c \quad (I.26)$$

În interiorul sferei $|x|^2 < \gamma m c^{-1}$ toate traiectoriile converg spre originea

coordonatelor. Dacă masa m este concentrată în interiorul sferei amintite atunci, în această sferă, toate particulelor sînt atrase fără întoarcere (gaură neagră).

Pentru găsirea traiectoriilor luminoase (optimale) în planul $x_3 = 0$, conform cu [10] trebuie stabilite funcțiile:

$$H = \Psi_1(-\gamma m x_1 |x|^{-3} + u_1) + \Psi_2(-\gamma m x_2 |x|^{-3} + u_2) \quad (1.27)$$

și ecuațiile diferențiale pentru variabilele auxiliare:

$$\dot{\Psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \gamma m \Psi_i |x|^{-3} - 3\gamma m x_i (\Psi_1 x_1 + \Psi_2 x_2) |x|^{-5} \quad i = 1, 2 \quad (1.28)$$

Din principiul maximului obținem:

$$u_i = c \Psi_i (\Psi_1^2 + \Psi_2^2)^{-\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2 \quad (1.29)$$

Punctele cercului $x_1^2 + x_2^2 = \gamma m c^{-1}$ ($x_3 = 0$) verifică relațiile (1.26-1.28) constituind traiectorii optimale staționare (cercul luminii închise).

Considerînd $x_1 = r \cos(\omega t + \theta)$, $x_2 = r \sin(\omega t + \theta)$, $u_i = \gamma m x_i r^{-3} + \dot{x}_i$; $\Psi_i = u_i$, $i = 1, 2$ unde $r = \sqrt[4]{3} \sqrt{\gamma m c^{-1}}$, $\omega = \gamma m r^{-3} \sqrt{2}$; $\theta = \text{const.}$

Relațiile (1.26-1.28) se verifică de asemenea, adică

$$x_1^2 + x_2^2 = \gamma m c^{-1} \sqrt{3} \quad (1.29)$$

constituie o traiectorie închisă. Viteza luminii pe această traiectorie [3] este

$$\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \gamma m r^{-1} \sqrt{2} = c \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816c$$

În zona din afara cercului (1.29) traiectoriile luminoase care vin de la infinit formează un număr finit de spirale în jurul acestui cerc și pleacă din nou la infinit. Traiectoriile mai depărtate se curbează trecînd pe lîngă el.

Orice traiectorie luminoasă a obiectului comandat tridimensional (1.26) dintr-un plan oarecare care trece prin originea coordonatelor prezintă aceleași proprietăți.

Astfel o gaură neagră M focalizează razele luminoase ale obiectelor care luminează (stele). Datorită acestui fenomen, deși din gaura neagră nu ies nici un fel de semnale spre noi, lumina provenită de la toate stelele este văzută de un observator ca și cum ar fi din punctul M . Astfel observatorul vede obiectul M foarte strălucitor (quasar).

Potrivit acestui model în centrul quasarului trebuie să se observe o

pată neagră de dimensiuni unghiulare $\frac{2r}{d}$, unde r este raza cercului (I.29), iar d distanța de la observator pînă la gaura neagră.

Două metrice în relativitatea anizotropă*

În [11], pe baza anizotropiei de tip Boltyanskiy în propagarea luminii se obțin două metrice, soluții exterioare, în cazul unui corp masiv, considerat fix, una pentru cazul apropierii, respectiv cealaltă pentru cazul îndepărtării.

Eriksson deduce metrica Schwarzschild [12] considerînd:

- într-un sistem de referință legat de un corp care cade liber către un corp masiv considerat fix, metrica este locală minkowskiană;
- sînt valabile formulele locale ale relativității restrînse
- coordonatele transversale nu sînt afectate.

În lucrarea [11] sînt reconsiderate ipotezele din [12] în sensul că sînt valabile formulele de transformare locală ale relativității anizotrope de tip Boltyanskiy (I.7) și (I.8).

Deducerea primei metrice

Din (I.7) și (I.8) se obțin formulele de transformare a duratelor și intervalelor spațiale:

$$dt_{\alpha} = \frac{dt_{\beta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)}} \quad (I.30)$$

$$dx_{\alpha} = dx_{\beta} \sqrt{\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)}$$

În sistemul de referință legat de corpul de probă care cade liber spre corpul masiv avem:

$$(dS)^2 = (cdt_0)^2 - \{(dl_{011})^2 + (dl_{01})^2\} \quad (I.32)$$

În reperul legat de corpul masiv avem:

* T.Horgoș, M.Agop, *Lucrare nepublicată*

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)}}$$

$$dl_{11} = dl_{011} \sqrt{\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)}$$

$$dl_1 = dl_{01}$$

$$(dS_A)^2 = c^2(dt)^2 \left[\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right) \right] - \frac{dr^2}{\left[\left(1 - \frac{v}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{v}{\rho}\right) \right]} - r^2 d\Omega \quad (I.33)$$

$$\text{cu } d\Omega = (d\theta)^2 + \sin^2\theta (dl)^2.$$

Pentru deducerea lui v folosim ecuația clasică $\frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{m_0M_0}{r} = 0$, folosită și în [12], de unde rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} \quad (I.34)$$

Cu notațiile $f(r) = \frac{\sigma(r) + \rho(r)}{2}$; $c = \frac{\sigma(r) - \rho(r)}{2}$ din (I.33) și (I.34) obținem:

$$(dS_A)^2 = c^2(dt)^2 \left[1 - \frac{2f}{f^2 - c^2} \sqrt{\frac{2GM_0}{r} + \frac{2GM_0}{r} \frac{1}{f^2 - c^2}} \right] - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2f}{f^2 - c^2} \sqrt{\frac{2GM}{r} + \frac{2GM}{r} \frac{1}{f^2 - c^2}} \right]} - r^2 d\Omega \quad (I.35)$$

Metrica (I.35) este o generalizare a metricii Schwarzschild, care poate fi regăsită în cazul particular $f = 0$.

Raza gravitațională*

Pentru a analiza singularitatea metricii să studiem comportarea coeficientului:

$$A = 1 - \frac{2f}{f^2 - c^2} \sqrt{\frac{2GM}{r}} + \frac{2GM_0}{r} \frac{1}{f^2 - c^2}$$

În cazul $f \rightarrow c$ valoarea maximă a lui f fiind c .

$$\lim_{f \rightarrow c} A = 1 - \lim_{f \rightarrow c} \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} \frac{2f}{f^2 - c^2} \left(1 - \sqrt{\frac{GM_0}{2f^2 r}} \right)$$

Distingem trei cazuri posibile:

a) $1 - \sqrt{\frac{GM_0}{2f^2 r}} > 0$ adică $r > r_0$, unde:

$$r_0 = \frac{GM_0}{2c^2} \quad (I.36)$$

Pentru $r > r_0$ $\lim_{f \rightarrow c} A = -\infty$.

Deoarece coeficientul lui $c^2(dt)^2$ din metrica (I.35) trebuie să fie pozitiv, rezultă imposibilitatea de a avea $f=c$ pentru $r > r_0$, adică sînt posibile semnale luminoase în ambele sensuri pe direcție radială.

b) $1 - \sqrt{\frac{GM_0}{2f^2 r}} < 0$ adică $r < r_0$

În acest caz $\lim_{f \rightarrow c} A = +\infty$.

Deci pentru $r < r_0$ este posibil ca $f=c$, adică vom avea semnele luminoase într-un singur sens pe direcție radială spre centru.

c) Potrivit considerațiilor de la punctele a) și b) rezultă că

$$\lim_{r \rightarrow r_0} f(r) = c \quad (I.37)$$

adică $\lim_{r \rightarrow r_0} \sigma = 2c$ și $\lim_{r \rightarrow r_0} \rho = 0$.

* T.Horgaș, M.Agop, *Lucrare nepublicată*

Pentru semnale luminoase pe direcție radială din metrica (I.35) rezultă:

$$\frac{dr}{dt} = c \left[1 - \frac{2f}{f^2 - c^2} \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} + \frac{2GM_0}{r} \frac{1}{f^2 - c^2} \right] \quad (I.38)$$

Impunând soluția acceptabilă fizic

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{d\sigma}{dt} = \lim_{r \rightarrow r_0} \sigma = 2c \quad (I.39)$$

și folosind regula lui l'Hospital din (I.38) obținem

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{df}{d\sigma} = -\frac{c}{3r_0} \quad (I.40)$$

Deducerea metricii a doua

Conform analizei anterioare rezultă că metrica (I.35) descrie apropierea corpurilor de corpul masiv considerat fix. Pentru îndepărtarea corpurilor introducem metrica sub forma:

$$(dS_B)^2 = Bc^2(dt)^2 - \frac{dr^2}{B} - Dr^2d\Omega \quad (I.40)$$

cu condiția $\lim_{r \rightarrow r_0} B = 0$.

Rezultă $B = A - 2$.

Din analiza metricilor (I.35) și (I.40) pentru $r \rightarrow \infty$ rezultă:

$$(dS_A)^2 = c^2(dt)^2 - dr^2 - r^2d\Omega$$

$$(dS_B)^2 = -c^2(dt)^2 + dr^2 - Dr^2d\Omega$$

Astfel se regăsesc cele două forme minkowskiene posibile (+ - - -) respectiv (- + + +) pentru $D = -1$.

Cu această valoare a coeficientului D , metrica (I.40) devine:

$$\begin{aligned} (dS_B)^2 = & -c^2(dt)^2 \left[1 + \frac{2f}{f^2 - c^2} \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} - \frac{1}{f^2 - c^2} \frac{2GM_0}{r} \right] + \\ & + \frac{(dr)^2}{\left[1 + \frac{2f}{f^2 - c^2} \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} - \frac{1}{f^2 - c^2} \frac{2GM_0}{r} \right]} + r^2d\Omega \end{aligned} \quad (I.41)$$

În ceea ce privește vitezele luminii în cele două sensuri pe direcție radială, respectiv funcție de anizotropie f , îndeplinesc condițiile:

$$\begin{aligned} \sigma(r_0) &= 2c & \sigma(\infty) &= c \\ \rho(r_0) &= 0 & \rho(\infty) &= -c \\ f(r_0) &= c & f(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.3. CEASORNICUL ȘI STRUCTURA SA* (M.Agop)

Existența ceasornicelor ideale este legată de mișcările circulare, perfecte, de perioade riguros constante. Pe baza acestora se pot apoi calibra diverse ceasornice empirice.

Disponem, în general, de două tipuri de ceasornice: „ceasornicul oscilator” și „ceasornicul rotator”. Deosebirea dintre oscilator și rotator este neesențială din punctul de vedere al teoriei timpului [13] întrucât un rotator uniform poate fi echivalent formal, întodeauna, cu doi oscilatori armonici, ortogonali, de perioade egale.

În ceea ce privește tipul forțelor ce determină mișcarea ceasornicelor nu se poate face apriori nici o precizare; el trebuie să decurgă, natural, din însăși structura ceasornicului.

Fie deci un ceasornic ideal a cărui mișcare este descrisă de ecuația:

$$\ddot{\Phi} + \omega^2 \Phi = 0 \quad (1.43)$$

unde Φ este o funcție de câmp, derivatele fiind efectuate după variabila de câmp u . Structura unui asemenea ceasornic se poate da prin intermediul pulsației ω a câmpului astfel: ω^2 este un invariant omografic față de raportul $\tau(u)$ a două soluții ale ecuației (1.43). Pentru aceasta să demonstrăm mai întâi că raportul soluțiilor [14]:

$$\Phi_1 = h e^{i(\omega u + \varphi)} + \bar{h} e^{-i(\omega u + \varphi)} \quad (1.44)$$

și

$$\Phi_2 = h' e^{i(\omega u + \beta)} + \bar{h}' e^{-i(\omega u + \beta)} \quad (1.45)$$

cu h și h' amplitudinile complexe de câmpuri și φ , β fazele acestora, și

* M.Agop, *Lucrare nepublicată*

anume:

$$\tau(u) = \frac{he^{i(\omega u + \varphi)} + h'e^{-i(\omega u + \varphi)}}{h'e^{i(\omega u + \beta)} + \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}} \quad (1.46)$$

satisface ecuația [14]:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \right)^2 = \omega^2 \quad (1.47)$$

Într-adevăr, vom avea succesiv:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= 2i\omega \frac{h\bar{h}'e^{i(\varphi-\beta)} - \bar{h}h'e^{i(\beta-\varphi)}}{[h'e^{i(\omega u + \beta)} + \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}]^2} \\ \dot{\tau} &= -4\omega^2 \frac{[h\bar{h}'e^{i(\varphi-\beta)} - \bar{h}h'e^{i(\beta-\varphi)}][h'e^{i(\omega u + \beta)} - \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}]}{[h'e^{i(\omega u + \beta)} + \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}]^3} \\ \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} &= 2i\omega \frac{h'e^{i(\omega u + \beta)} - \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}}{he^{i(\omega u + \beta)} + \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}} \end{aligned} \quad (1.48)$$

și

$$\left(\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \right) = -2\omega^2 [h'e^{i(\omega u + \beta)} + \bar{h}'e^{-i(\omega u + \beta)}]^{-1}$$

Cu aceste expresii ecuația (1.47) este identic satisfăcută.

Rămîne să arătăm că aceeași ecuație (1.47) este invariantă la transformarea omografică [14]:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \begin{matrix} ad - bc \neq 0 \\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad (1.49)$$

Întrucît au loc relațiile:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}' &= \frac{(ad - bc)}{(c\tau + d)^2} \dot{\tau} \\ \ddot{\tau}' &= (ad - bc) \left[\frac{\ddot{\tau}}{(c\tau + d)^2} - \frac{2c\dot{\tau}^2}{(c\tau + d)^3} \right] \end{aligned} \quad (1.50)$$

și

$$\frac{\ddot{\tau}'}{\dot{\tau}'} = \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} - \frac{2c\dot{\tau}^2}{(c\tau + d)} \quad (1.51)$$

după un calcul relativ simplu ce constă în introducerea lor în (I.47), se obține această invarianță.

Acum funcția:

$$\tau(u) = \frac{he^{i(\omega u + \varphi)} + \bar{h}e^{-i(\omega u + \varphi)}}{e^{i(\omega u + \varphi)} + e^{-i(\omega u + \varphi)}} = \frac{h + \bar{h}K}{1 + K} \quad (I.52)$$

cu

$$K = e^{2i(\omega u + \varphi)} \quad (I.53)$$

este specifică fiecărui câmp. Dar nu numai ea: fie funcția

$$\tau'(u) = \frac{h' + \bar{h}'K'}{1 + K'} \quad (I.54)$$

specifică unui alt câmp. Faptul că (I.52) și (I.54) sînt soluții ale ecuației (I.47) indică că între ele există relația omografică (I.49), care explicitată:

$$\frac{h' + \bar{h}'K'}{1 + K'} = \frac{a \frac{h + \bar{h}K}{1 + K} + b}{c \frac{h + \bar{h}K}{1 + K} + d} \quad (I.55)$$

conduce la grupul Barbilian [14]:

$$h' = \frac{ah + b}{ch + d}; \quad K' = \frac{\bar{c}\bar{h} + d}{ch + d}K \quad (I.56)$$

Acest grup posedă 1- formule absolut invariante [14]:

$$\omega_0 = i \left(\frac{dK}{K} - \frac{dh + d\bar{h}}{h - \bar{h}} \right) \quad (I.57)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{dh}{K(h - \bar{h})}$$

și 2- forma:

$$\frac{ds^2}{g'} = (\omega_0^2 - 4\omega_1\omega_2) = - \left(\frac{dK}{K} - \frac{dh + d\bar{h}}{h - \bar{h}} \right)^2 + \frac{4dh d\bar{h}}{(h - \bar{h})^2}; \quad g' = \text{const.} \quad (I.58)$$

Principiul variațional

Fie o varietate de metrică:

$$h_{ij} dY^i dY^j \quad (1.59)$$

cu h_{ij} , Y^i tensorul metric respectiv coordonatele pe varietate. Prin scufundarea acesteia pe o varietate de metrică:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.60)$$

unde $g_{\mu\nu}$, x^μ sînt tensorul metric respectiv coordonatele pe această nouă varietate, se poate construi invariantul [15]:

$$L = g^{\mu\nu} h_{ij} \frac{\partial Y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial Y^j}{\partial x^\nu} \quad (1.61)$$

și respectiv principiul variațional [15]:

$$\delta \int L g^{\frac{1}{2}} d\tau = 0 \quad (1.62)$$

cu $g = \det(g_{\mu\nu})$ și $d\tau$ elementul de volum, corespunzător invariantului (1.60). Dacă Y^i sînt acum coordonatele Barbilian $(h, \bar{h}, K)$ iar (1.58) definește varietatea metrică (1.59) atunci prin scufundarea acesteia pe varietatea de metrică (1.60) se obține următorul invariant:

$$L = g^{\mu\nu} \left\{ - \left[K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x^\mu} - (h - \bar{h})^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\mu} \right) \right] \left[K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x^\nu} - (h - \bar{h})^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\nu} \right) \right] + 4(h - \bar{h})^{-2} \frac{\partial h}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\nu} \right\} \quad (1.63)$$

În condițiile în care se definește și transportul paralel [15] ceea ce operatorial este echivalent cu:

$$K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x^\mu} = (h - \bar{h})^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\mu} \right) \quad (1.64)$$

atunci (1.63) ia forma:

$$L = 4g^{\mu\gamma} (h - \bar{h})^{-2} \frac{\partial h}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\gamma} \quad (1.65)$$

Aceleași rezultate se pot exprima și în coordonatele reale (u, v, φ) . Se obține:

$$L = g^{\mu\gamma} \left\{ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + v^{-1} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\gamma} + v^{-1} \frac{\partial u}{\partial x^\gamma} \right) + \right. \\ \left. + v^{-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial v}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^\gamma} - i \frac{\partial v}{\partial x^\gamma} \right) \right\} \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\gamma} = -v^{-1} \frac{\partial u}{\partial x^\gamma} \quad (1.67)$$

$$L = g^{\mu\gamma} v^{-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial v}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^\gamma} + i \frac{\partial v}{\partial x^\gamma} \right) \quad (1.68)$$

unde

$$h = u + iv ; \quad K = e^{i\varphi} \quad (1.69)$$

Să găsim acum câteva semnificații parametrilor $(h, \bar{h}, K)$ ai grupului Barbilian.

Cîmpul gravitațional staționar

Să admitem că metrica (1.58) este cea a unei varietăți Lobacevski [15]. Prin scufundarea acesteia pe o varietate euclidiană tridimensională, invariantul (1.65) devine lagrangeanul:

$$L = 4 \frac{\nabla h \nabla \bar{h}}{(h - \bar{h})^2} \quad (1.70)$$

asa încît principiul variațional (1.62) are expresia:

$$\delta \int \frac{\nabla h \nabla \bar{h}}{(h - \bar{h})} d^3x = 0 \quad (1.71)$$

Acesta este tocmai principiul lui Ernst din care se pot obține soluțiile de vid ale cîmpului gravitațional staționar [15].

Cîmpul electromagnetic staționar

Să facem mai întâi următoarele substituții:

$$\sqrt{\epsilon_0} E_K = v^{-1} \frac{\partial u}{\partial q_K} \quad \sqrt{\mu_0} H_K = v^{-1} \frac{\partial v}{\partial q_K} \quad (1.72)$$

unde ϵ, μ, E_K, H_K au semnificațiile obișnuite din teoria cîmpului electromagnetic [15] iar q_K este un parametru afin căruia îi vom da semnificații ulterior. Dacă în această situație luăm

$$\begin{aligned} f_K &= v^{-1} \frac{\partial u}{\partial q_K} + i v^{-1} \frac{\partial v}{\partial q_K} = \sqrt{\epsilon_0} E_K + i \sqrt{\mu_0} H_K \\ \bar{f}_K &= v^{-1} \frac{\partial u}{\partial q_K} - i v^{-1} \frac{\partial v}{\partial q_K} = \sqrt{\epsilon_0} E_K - i \sqrt{\mu_0} H_K \end{aligned} \quad (1.73)$$

atunci expresia:

$$H = \frac{1}{2} f_K \bar{f}_K = \frac{1}{2} v^{-2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial q_K} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial q_K} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_K^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_K^2 \quad (1.74)$$

are semnificația hamiltonianului pentru cîmpul electromagnetic de vid [15].

Folosind tensorul cîmpului electromagnetic

$$F_{\mu\gamma} = \partial_\mu A_\gamma - \partial_\gamma A_\mu \quad \mu, \gamma = \overline{1, u} \quad (1.75)$$

relația (1.74) devine echivalentă și cu expresia:

$$H = \frac{1}{2} (F_{0K})^2 + \frac{1}{4} (\epsilon_{kem} F_{em})^2 \quad (1.76)$$

unde

$$\sqrt{\epsilon_0} E_K = F_{0K} \quad \sqrt{\mu_0} H_K = \frac{1}{2} \epsilon_{kem} F_{em} \quad (1.77)$$

Pentru a găsi acum o semnificație parametrului afin q_K să studiem cazul particular

$$A_K \neq 0 \quad A_0 = 0 \quad (1.78)$$

numită și etalonare hamilton [15]. În acest caz, cum rezultă din [15], vom avea:

$$q_K = A_K \quad (1.79)$$

$$\sqrt{\mu_0} H_K = \frac{\partial \ln v}{\partial A_K} \quad (1.80)$$

și

$$\ln v = q = \int d^3 x_0 J_0 \quad (1.81)$$

cu

$$J_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\rho\gamma\sigma} T_r \left(A_\sigma \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\mu} + \frac{2}{3i} e A_\gamma A_\rho A_\sigma \right) \quad (1.82)$$

unde $q, e, \varepsilon_{\mu\rho\gamma\sigma}$ sînt sarcina generalizată, sarcina electronului respectiv tensorul antisimetric cvadridimensional a lui Levi-Civita. Acum variabila u , ținînd seama de (1.72), (1.81) și [15]:

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_K = \frac{\partial A_K}{\partial t} = \dot{A}_K \quad (1.83)$$

are expresia:

$$u = \int e^q \dot{A}_K dA_K \quad (1.84)$$

În aceste condiții hamiltonianul (1.74) este de forma:

$$H = \left(\frac{\partial A_K}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial A_K} \right)^2 \quad (1.85)$$

iar unghiul transportului paralel:

$$\varphi = - \int \dot{A}_K dA_K \quad (1.86)$$

Deci φ este constant atît timp cît potențialul vector $\vec{A}$ este constant.

Această tratare în coordonatele A_K conduce la „soluția instantonică” a cîmpului electromagnetic ce include numai cîmpurile gauge A_μ [15]. Există totuși un caz în care coordonatele au dimensiunea unei lungimi, adică sînt coordonatele în adevăratul sens al cuvîntului. El se obține din condiția (1.67) scrisă astfel:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x^K} = v^{-1} \frac{\partial u}{\partial x^K} = \sqrt{\varepsilon} E_K \quad (1.87)$$

ceea ce înseamnă că cîmpul electric E_K se poate defini drept gradientul

unei funcții scalare A_0 cu

$$A_0 = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \varphi \quad (1.88)$$

numită potențial:

$$F_{0K} = E_K = \frac{\partial A_0}{\partial x^K} \quad (1.89)$$

O asemenea situație conduce la câmpul electromagnetic staționar [15]:

$$\vec{A} = 0 \quad A_0 \neq 0 \quad (1.90)$$

În ceea ce privește componenta magnetică H_K din ecuația Maxwell:

$$\frac{\partial F_{\mu K}}{\partial x^K} = 0 \quad (1.91)$$

dacă se ia $\mu = e$ se observă că putem scrie:

$$F_{ek} = \epsilon_{eki} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (1.92)$$

unde Φ este „potențialul magnetic”. Ținând seama de (1.77) se obține:

$$\sqrt{\mu_0} H_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (1.93)$$

și respectiv:

$$\ln v = \Phi \quad (1.94)$$

Acum, pe baza relațiilor (1.72), (1.90) și (1.94), pentru variabila u se găsește expresia:

$$u = e^{\Phi} A_0 \quad (1.95)$$

Această tratare în coordonate X^k conduce la „soluția staționară” a câmpului electromagnetic ce poate include și monopolul Dirac [15].

Dar atît o tratare cît și alta se reduc, în condițiile transportului paralel [15], la potențialul complex:

$$\Psi = \varphi + i \ln v \quad (1.96)$$

În acest caz lagrangeanul câmpului electromagnetic de vid are expresia [15]:

$$L = -\frac{1}{4\mu} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\left(\frac{\partial \ln v}{\partial q^\epsilon} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^\epsilon} \right)^2 \right] \quad (I.97)$$

iar componentele tensorului câmpului electromagnetic au forma [15]:

$$8\pi T_{00} = (\nabla \ln v)^2 + (\nabla \varphi)^2 \quad (I.98)$$

$$4\pi T_0^i = \epsilon^{ik\epsilon} \left(\frac{\partial \ln v}{\partial q^i} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^k} \right)$$

$$-4\pi T^{ik} = \left(\frac{\partial \ln v}{\partial q^i} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^k} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \right) \left(\frac{\partial \ln v}{\partial q^k} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \delta^{ik} \left\{ \left(\frac{\partial \ln v}{\partial q^\epsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^\epsilon} \right)^2 \right\} \quad (I.99)$$

unde

$$q^\epsilon \equiv (A, x) \quad (I.100)$$

Aceasta înseamnă că ambele tratări conduc la aceeași „soluție generalizată de câmp” a câmpului electromagnetic de vid pentru potențialul complex (I.96), dar pe varietăți diferite, una de coordonate A_μ iar cealaltă de coordonate x^μ .

Supergravitația $N=1$

Fie 2-forma diferențială definită în (I.58) pentru transportul paralel [15]. Dacă în aceasta facem schimbarea de variabilă:

$$h = \frac{z-1}{z+1} \quad (I.101)$$

unde z este de asemenea o mărime complexă, atunci vom avea succesiv:

$$dh = \frac{2dz}{(z+1)^2} \quad d\bar{h} = \frac{2d\bar{z}}{(\bar{z}+1)^2} \quad (I.102)$$

$$h - \bar{h} = \frac{z-1}{z+1} - \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{2(z-\bar{z})}{(z+1)(\bar{z}+1)}$$

aşa încât (I.58) devine:

$$\frac{dh d\bar{h}}{(h - \bar{h})^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} \quad (\text{I.103})$$

În aceste condiții 2-forma (I.103) va fi invariantă față de omografia complexă:

$$z' = \frac{az - b^*}{bz + a^*} \quad (\text{I.104})$$

cu

$$aa^* + bb^* = 1 \quad (\text{I.105})$$

Într-adevăr vom avea mai întâi:

$$dz' = \frac{dz}{(bz + a^*)^2} \quad d\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{(b\bar{z} + a^*)^2} \quad (\text{I.106})$$

$$z' - \bar{z}' = \frac{az - b^*}{bz + a^*} - \frac{a\bar{z} - b^*}{b\bar{z} + a^*} = \frac{z - \bar{z}}{(bz + a^*)(b\bar{z} + a^*)} \quad (\text{I.107})$$

Rezultă:

$$\frac{dz' d\bar{z}'}{(z' - \bar{z}')^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} \quad (\text{I.108})$$

Recunoaștem în (I.104) matricile complexe:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{I.109})$$

cu

$$\det A = aa^* + bb^* = 1 \quad (\text{I.110})$$

matrici ce formează grupul SU (1,1). Acesta este tocmai grupul de invarianță al supergravitației N=1 pentru cazul potențialului plat ($V(z)=0$) [15]. Așadar, acceptînd în spațiul Lobacevski transportul paralel Levi-Civita [15] grupul Barbilian poate fi considerat și el drept grup de invarianță al supergravitației N=1 cu potențial plat. În această ultimă situație lagrangeanul de expresie (I.63) devine:

$$L = (z - \bar{z})^{-2} \frac{\partial z}{\partial X^\mu} \frac{\partial \bar{z}}{\partial X^\mu} \quad (I.111)$$

cu z supercîmpul scalar.

Implicații

Așadar acest grup dă nu numai structura internă a ceasornicului a cărui mișcare este descrisă de ecuația (I.43), ci și trecerea între diversele cîmpuri de aceeași pulsație proprie ω legînd atît amplitudinile complexe ale lor cît și fazele. Aparența acțiunii simultane a acestor cîmpuri este tocmai mișcarea ceasornicului.

Sîntem acum în măsură să indicăm și natura forțelor ce determină mișcarea ceasornicului avînd în vedere semnificația fizică a parametrilor $(h, \bar{h}, k)$: fie cîmp gravitațional staționar, fie electromagnetic staționar, fie supercîmp scalar cu potențial plat. Dispunem deci de minim trei categorii de rotatori naturali potrivit naturii forțelor ce determină mișcarea ceasornicului. Pentru o mai bună înțelegere ne putem imagina de exemplu rotația unei stele duble în jurul centrului de masă sau rotația electronului în jurul nucleului, în starea fundamentală a atomului de hidrogen.

Un asemenea rezultat conține implicit și teoria lui de Broglie [14].

I.4 SEMNIFICAȚIA FORȚEI ȘI A POTENȚIALULUI ÎN RELATIVITATEA GENERALĂ. UNELE OBSERVAȚII ASUPRA MĂSURĂTORILOR ÎN ASTRONOMIE* (N.Mazilu, M.Agop)

Fără îndoială că metoda potențialului complex a lui Ernst constituie, în teoria gravitației, dar mai ales în cosmologie, una dintre metodele cele mai simple și elegante de obținere a soluțiilor de vid și vid electromagnetic pentru tensorul metric. Este important de notat că, deși această metodă pornește de la ecuațiile de cîmp ale lui Einstein pentru tensorul metric [14], forma finală a ecuațiilor Ernst referitoare la potențialul complex poate fi obținută și din alte considerente, în speță considerente de invarianță.

* N.Mazilu, M.Agop, *Lucrare nepublicată*

Într-adevăr, după cum am arătat în paragraful precedent ecuațiile Ernst pot fi obținute dintr-un „super-lagrangeian” ce derivă din metrica Beltrami, invariantă în raport cu grupul omografiilor reale ale drepte complexe. Principiul de obținere a unor asemenea ecuații a fost pentru prima dată evidențiat de Matzner și Misner [14] ca principiu variațional referitor la metricile cu simetrie cilindrică. În mod concret, situația este următoarea: orice metrică staționară a varietății spațiu-timp poate fi pusă sub forma convenabilă:

$$ds^2 = \beta (dx^2 + \omega_\gamma dx^\gamma)^2 - \beta^{-1} \Gamma_{\mu\gamma} dx^\mu dx^\gamma \quad (I.112)$$

unde β este o funcție ce nu depinde de timp, iar $\vec{\omega}$ este un vector ce satisface ecuația:

$$\text{rot } \vec{\omega} = -\frac{\nabla \alpha}{\beta^2} \quad (I.113)$$

cu α o nouă funcție ce nu depinde de timp. Operațiile de derivare în raport cu coordonatele se subînțeleg în metrica tridimensională ambientă $\Gamma_{\mu\gamma}$, ce poate fi aleasă în mod convenabil. Metrica (I.112) este deci complet determinată dacă se cunosc α și β , pentru care, *pe baza ecuațiilor lui Einstein* în cazul vidului, se obțin ecuațiile diferențiale ale lui Ernst [15].

$$\beta \nabla^2 \alpha - 2 \nabla \alpha \nabla \beta = 0 \quad (I.114)$$

$$\beta \nabla^2 \beta - (\nabla \beta)^2 + (\nabla \alpha)^2 = 0$$

operatorii diferențiali fiind subînțeleși, așa cum am menționat mai înainte, în metrica tridimensională ambientă.

Acum se poate face observația că ecuațiile (I.114) sînt ecuațiile Euler-Lagrange referitoare la densitatea de „lagrangeiană”

$$L = \frac{1}{2\beta^2} [(\nabla \alpha)^2 + (\nabla \beta)^2] \quad (I.115)$$

Ori, această „lagrangeiană” poate fi considerată ca fiind obținută din metrica Beltrami a planului Lobacevski [15]:

$$dl^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\beta^2} \quad (I.116)$$

prin înlocuirea diferențialelor prin gradientii, de unde rezultă principiul pe care noi l-am desemnat cu numele celor doi descoperitori ai săi: dacă putem să descriem câmpul prin variabilele (Γ_{ij}) pentru care am descoperit

o metrică:

$$h_{ij}d\Gamma^i d\Gamma^j \quad (I.117)$$

într-un spațiu tridimensional ambiant cu metrica

$$\Gamma_{\mu\gamma}dx^\mu dx^\gamma \quad (I.118)$$

atunci ecuațiile de câmp derivă dintr-un principiu variațional referitor la densitatea de lagrangeiană

$$L = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu\gamma} h_{ij} \frac{\partial \Gamma^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x^\gamma} \quad (I.119)$$

unde, evident, considerăm convenția de sumare pe indici repetabili. Adoptarea acestui principiu este, cum se vede, condiționată de posibilitatea de a descrie câmpul gravitațional în termeni ai unor mărimi de câmp ce acceptă o descriere metrică, iar în [15] am avansat ideea că aceste metrice pot fi produse ca metrice invariante pe diversele realizări ale grupului SL (2R).

Fapt într-adevăr semnificativ și, în același timp, cât se poate de atractiv, este acela că prin principiul variațional considerat, ecuațiile Ernst transcend aria principală acoperită de ecuațiile de câmp ale lui Einstein, producând metricele spațio-temporale staționare din considerente externe de simetrie. Desigur, tensorul metric nu a putut fi obținut niciodată fără a lua în considerație și asemenea rațiuni, însă trebuie să observăm că ele se refereau mai ales la simetria spațială. Spre deosebire de acestea, dorim să subliniem că cele ce conduc la ecuația lui Ernst pot să aibă o semnificație fizică fundamentală, odată ce mărimile la care ele se referă, sub condiția evidentă de a cunoaște însăși semnificația fizică a acestora din urmă. Dacă dorim să desfășurăm cadrul conceptual al ecuațiilor lui Einstein, ce lasă libertatea extremă prin nedeterminarea tensorului energiei, atunci ecuațiile lui Ernst par o alternativă adecvată sub condiția cunoașterii semnificației fizice a mărimilor de câmp la care ele se referă. După părerea noastră aceeași este problema cheie a teoriei, iar în [15] am dat diverse semnificații câmpurilor α și β pe baza unor realizări ale grupului SL (2R).

Rezultatul de față are ca scop aprofundarea și unitarizarea semnificației acestor mărimi de câmp pe același principiu, însă pornim de la altă idee. Anume, dacă ecuațiile Ernst transcend punctul lor de pornire, ecuațiile de câmp ale lui Einstein, înseamnă că originea lor trebuie căutată în raționamentele pe baza cărora Einstein însuși și-a dedus ecuațiile. Ca orice bază axiomatică, acestea trebuie să fi conținut esențialul în experiența umană la acel moment al cunoașterii, ceea ce înseamnă că s-au omis detalii care atunci păreau neesențiale. Perspectiva a aproape un secol de relativitate

generală și cosmologie, poate răsturna semnificativ ordinea valorilor în selectarea esențialului, iar după părerea noastră ecuațiile Ernst reflectă tocmai acest fapt: tensorul de curbura ca modalitate de descriere a varietății spațio-temporale conține în sine numai fragmentar o atare posibilitate.

Raționamentele conform cărora Einstein a dedus ecuațiile de câmp ce-i poartă numele sînt acum bine cunoscute. Pentru referință detaliată asupra premiselor matematice și a consecințelor, dintr-un punct de vedere modern, cititorul poate consulta lucrarea exhaustivă a lui N. Ionescu-Pallas [13]. Pentru ceea ce ne interesează pe noi acum, anume mersul ideilor lui Einstein, putem apela la sinteza timpurie a însăși autorului teoriei relativității generale [17].

Principiul echivalenței dintre masa inertă și masa grea îi arată lui Einstein că generalizarea naturală a ecuației de mișcare a unei particule ce se mișcă sub acțiunea inerției și gravitației este ecuația geodezicelor. În cazul particular al câmpurilor slabe sau, ceea ce e totuna, a vitezelor de mișcare mici față de viteza luminii, ecuația geodezicelor devine ecuația de mișcare clasică, pentru cazul *forțelor ce derivă dintr-un potențial*. Subliniem acest fapt, important în cele ce urmează. Mai departe adoptînd pentru potențial ecuația clasică a lui Poisson, ca expresie a faptului că sursa potențialului este materia, Einstein îi caută analogul, ajungînd la cunoscutele ecuații care-i poartă numele. În cazul particular amintit anterior, Einstein obține ecuația lui Poisson pornind de la ecuațiile sale de câmp, așa cum și trebuie, de altfel, însă ecuațiile sale îi permit ceva mai mult: descoperirea deviației razei de lumină în apropierea surselor gravitaționale intense și cunoscuta explicație a avansului periheliului plantelor.

Referitor la acest din urmă fapt, este de remarcat că teoria relativității avea atunci de depășit un punct cheie al teoriei newtoniene a gravitației, și anume *centralitatea forțelor gravitaționale*. Într-adevăr, după cum arată teorema clasică a lui Bertrand [18], pentru potențiale de tip newtonian și armonice, orbitele de mișcare ale particulelor sînt orbite închise, ceea ce exclude, în cadrul teoriei newtoniene, explicația teoretică a avansului periheliului plantelor. Ar rezulta că trebuie folosite alte tipuri de potențiale *centrale* care să explice faptele observate, și se cunosc multiple corecții aduse potențialului newtonian, niciuna însă destul de satisfăcătoare din punct de vedere teoretic. Pe de altă parte, majoritatea aspectelor principale ale mecanicii sînt, cu prisosință, explicate de acest tip de potențiale, așa încît explicația relativității generale pentru fenomenele dizidente constituie cea mai bună alternativă cu menținerea rigorii matematice a mecanicii clasice.

Cu această scurtă revistă a ideilor care l-au călăuzit pe Einstein în construcția sa, și a consecințelor imediate ale teoriei, dorim să atragem atenția asupra celor două aspecte cheie ale teoriei newtoniene ce trebuie depășite

la momentul respectiv: este vorba despre faptul că forțele derivă dintr-un potențial, adică sînt *conservative*, și apoi despre faptul că ele sînt *centrale*, în sensul că nu au decît componentă radială. Primul aspect - conservabilitatea - se cerea generalizat ca atare, în timp ce al doilea se cerea evitat datorită teoremei lui Bertrand ce nu permite decît orbite strict închise mișcărilor planetare. Teoria relativității generale găsește soluția armonioasă a problemei prin evitarea noțiunii de forță însăși, redînd efectele observabile ale mișcării ca proprietăți ale spațiului. În măsura în care teoria newtoniană este conținută în teoria relativității generale ca un caz limită, vedem aici nu o negare a teoriei clasice ci mai ales o conservare a ei, prin ceea ce avea atunci mai reprezentativ: noțiunea de potențial. Din necesitatea de a se depăși un anumit moment al cunoașterii s-au omis anumite aspecte ale acestei noțiuni, neesențiale la momentul respectiv. Pentru a le evidenția vom face o scurtă istorie a noțiunii de forță în măsura în care aceasta e implicată în teoria clasică a gravitației, scoțînd în evidență și un aspect nedorit al ei.

Din punct de vedere logic, prima caracterizare a forțelor gravitaționale este aceea că ele nu depind de *distanța* dintre două corpuri, fiind indiferent care dintre ele este luat ca sursă a ceea ce se numește cîmp gravitațional. Numai rațiuni gravitaționale, geometrice, de genul legilor lui Kepler obligă la a considera unul dintre corpuri ca sursă a cîmpului, impunînd, prin aceasta, un anumit reper - în speță, cel cu originea în Soare - pentru a descrie mișcarea planetelor. Apar însă mari probleme dacă se consideră originea acestui reper identică cu vreun punct geometric, cum ar fi centrul Soarelui, ceea ce conferă forței caracterul de forță *centrală*, implicat logic de acela că nu depinde decît de *distanța dintre corpuri*. Orice asemenea încercare de identificare aduce în actualitate cunoscutele dizidențe [14] ce au început să se evidențieze chiar de la Newton. Care este, de fapt, fondul problemei?

Cu ajutorul postulatelor dinamicii, Newton a transformat rolul de gravitație, din principiul explicativ al observațiilor relevante de legile lui Kepler, în acela de *cauză* a mișcării planetelor. Aceasta a impus ulterior, mai ales din necesități matematice, noțiunea de reper - mai întîi în sensul matematic - astfel încît ecuațiile de mișcare au căpătat forma diferențială cunoscută ce permite geometrizarea mișcării. Mai ales geometria diferențială a secolului al 19-lea a făcut posibilă dezvoltarea teoriei cîmpurilor vectoriale în legătură cu cea a potențialului, forța de gravitație între Soare și planete dovedindu-se a fi gradientul potențialului. Cunoscuta ecuație a lui Binet [18] oferă atunci toate aspectele legate de ceea ce, îndeobște, se numește problema lui Kepler. În asemenea probleme, *distanța* în raport cu care se dă expresia forței, devine o *coordonată* dintr-un sistem special de coordonate: este vorba de *distanța radială* în raport cu originea reperului, în sistemul de

coordonate sferice; celelalte două sînt, precum se știe unghiurile de longitudine și colatitudine. În astfel de descrieri, forțele devin funcții matematice care, în majoritate a problemelor de interes, au una din următoarele caracteristici pe care le transcriem în ordinea devenirii lor istorice:

a) Au mărimea ce depinde numai de distanța radială, ca reflex al faptului că ele nu depind decît de distanța dintre corpuri.

b) Sînt *conservative*, adică derivă dintr-un potențial.

c) Sînt *centrale*, adică nu au decît componentă radială, ca reflex al faptului că numai astfel poate fi explicată traiectoria prin echilibrul mecanic între forțe.

Nici una dintre aceste condiții nu este pur experimentală, ci reprezintă consecința matematică a unor principii experimentale - principiile mecanicii - ele fiind într-o strînsă legătură una cu alta, în sensul că dacă sînt satisfăcute oricare două dintre ele, este satisfăcută și a treia. Simetria acestei legături se rupe abia pe plan matematic: dacă forțele au mărime ce nu depinde decît de distanța radială și sînt conservative, ele *nu sînt neapărat și centrale*. Într-adevăr, pentru asemenea forțe va trebui să avem:

$$(\nabla V)^2 = f^2(r) \quad (I.120)$$

unde $f(r)$ este, pînă la o constantă neesențială acum, mărimea forței, iar $V(r)$ este potențialul. În coordonate sferice, ecuația (4.7) este:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \right] = f^2(r) \quad (I.121)$$

unde r, θ, φ , au semnificația obișnuită. Putem rezolva ecuația (I.121) prin metoda separării variabilelor, exact așa cum se rezolvă clasic ecuația Hamilton-Jacobi. Anume, scriem potențialul sub forma:

$$V(\vec{r}) = V_r(r) + V_\theta(\theta) + V_\varphi(\varphi) \quad (I.122)$$

separînd ecuațiile pentru diversele componente, și vom obține, pînă la constante aditive:

$$V_r(r) = \int \sqrt{[rf(r)]^2 - \beta^2} \frac{dr}{r}$$

$$V_\theta(\theta) = \int \sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (I.123)$$

$$V_\varphi(\varphi) = \gamma \varphi$$

unde β și γ sînt două constante „de separare”.

Citim astfel, pe ultimile două ecuații (I.123) că există situații în care avem componente neradiale ale forțelor, astfel încât forțele conservative și cu mărime depinzând numai de distanța radială nu sînt neapărat și centrale. S-ar putea astfel prezenta în mod natural o *alternativă clasică* respectînd toate rigorile matematice, de exemplu în problema avansului de periheliu, dacă ne-am limita la metoda newtoniană de a găsi forțele ce *explică* mișcările numai din analiza acestora din urmă. Pentru că este evident că, cel puțin în principiu, ecuațiile (I.123) au soluții pentru cazul:

$$f(r) = \frac{\text{const}}{r^2} \quad (\text{I.124})$$

și, tot în principiu, ecuațiile de mișcare referitoare la potențialul (I.122) se pot rezolva, după care se pot obține constantele β și γ , astfel încît să satisfacă observațiile la zi. Într-o astfel de tratare a problemei, potențialului *nici nu este necesar*, totul este să găsim un vector care să aibă ca model $\text{pe}f(r)$ din (I.124), problemă care admite o dublă infinitate de soluții. Fără îndoială însă că acest fapt ar reține pentru forță numai un caracter *esențial explicativ*, privind-o de cel de *cauză* a mișcării pe care î-l impune rigoarea clasică. Așa încît transformarea rolului forțelor din principiu explicativ în cauză a mișcării, este cea care impune și schimbarea atitudinii față de potențial, în sensul că dacă acesta ar putea fi determinat din considerente exterioare, am putea obține forța ca gradient al potențialului și, evident, am putea găsi $f(r)$ din (I.120), pentru care (I.124) să fie doar un caz cu totul particular.

Nu credem că este cazul să insistăm acum prea mult asupra faptului că ecuația Poisson sau Laplace se prezintă drept candidat natural pentru determinarea potențialului ca soluție a lor sub diverse condiții limită. Mai ales ecuația Laplace este cea ce determină potențialul în regiunile din afara materiei ce crează cîmpul gravitațional. În mod sigur potențialul ce guvernează mișcările planetelor în jurul Soarelui este o soluție a ecuației Laplace, evident, mișcarea se face în afara materiei ce se consideră că a creat cîmpul. Dar dacă impunem unui potențial de tipul (I.122) condiția să fie soluție a ecuației lui Laplace, pe care o scriem în coordonate sferice:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

vom găsi că el trebuie să fie neapărat de forma:

$$V(\vec{r}) = A + \frac{B}{r} + C \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + D \varphi \quad (\text{I.125})$$

Acest potențial nu mai satisface însă condiția (I.121) decât dacă $C^2 + D^2 = 0$ condiția realizată în (I.123) pentru $\beta = 0$, în care caz componenta forței pe meridian devine *imaginară*. Singurul caz de luat în considerare este atunci numai $C = D = 0$, când potențialul (I.125) devine cel obișnuit, newtonian, nu mai există componente neradiale ale forțelor, și recădem sub incidența teoremei lui Bertrand.

O alternativă ar fi cea de a accepta în locul ecuației Laplace, ecuația lui Poisson, dar clasic nu se poate, deoarece materia ce crează câmpul nu e prezentă la locul mișcării. Alternativa ar fi viabilă dacă potențialul sau, mai exact, forța creată ar putea fi privită ca efect *retardat* al prezenței sursei într-un anumit loc, ceea ce, însă nu se poate realiza decât într-o teorie spațio-temporală așa cum, evident, este cea a lui Einstein, care s-a și impus ca atare. Ori această teorie conține o mare necunoscută după cum relevă Einstein însuși: este vorba de tensorul energie al materiei, ce trebuie dedus din considerente apriori. El reușește cu succes în cazurile în care acesta poate fi bine definit, cum este cel al vidului sau al vidului electromagnetic, pentru care s-au și putut da ecuațiile lui Ernst anterioare. De aceea ne punem problema dacă nu cumva, acordând ecuațiilor Ernst maximă generalitate, nu putem descoperi pentru câmpurile α și β semnificații legate de ideea clasică de potențial, lăsînd însă în urmă această noțiune sau, cel puțin, plasînd-o într-un context mai natural.

Mai întîi dorim să subliniem că ideea potențialului complex nu trebuie exclusă chiar fără nici o analiză ceva mai aprofundată. Există în fizică suficient de multe situații în care se lucrează cu funcții cu valori complexe, avîndu-se însă în vedere numai părțile lor reale. Dacă renunțăm la ecuațiile de mișcare în sens clasic, atunci putem să reținem potențialul complex fără probleme. Singura problemă ar fi atunci modalitatea descrierii mișcării și sîntem surprinși să constatăm că potențialul complex de tipul (I.125) o conține totuși. Într-adevăr, conform unor uzanțe clasice, vom cere ca potențialul să fie „nul la infinit”, ceea ce, în (I.125) cu

$$C = \pm i\gamma$$

$$D = \gamma$$

înseamnă două ecuații complexe de tipul:

$$\gamma \left(\varphi \pm i \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + A = 0 \quad (\text{I.126})$$

pe care nu le putem interpreta *numeric*, deoarece ar însemna că potențialul

satisface condiției asimtotice numai pe o singură direcție. Vom accepta că ecuațiile (I.126) sînt două *drepte complexe* într-un plan situat la infinit. Într-adevăr, prin relațiile:

$$\begin{aligned} u &= \gamma \varphi \\ v &= \gamma \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (\text{I.127})$$

sfera de rază γ se aplică conform pe un plan euclidian în cordonatele u și v . Atunci ecuațiile (I.126) reprezintă două drepte complexe din acest plan. Aici este totuși necesar să facem observația că acest plan este un *plan de la infinit*. Avînd însă în vedere nedeterminarea constantelor din (I.125) îi vom putea acorda un caracter evident proiectiv așa încît trebuie să considerăm că planul în chestiune trece prin originea reperului ales. Ca atare, în selectarea soluțiilor ecuațiilor ce le avem la dispoziție va trebui să ne luăm precauția ca, cel puțin în cazuri speciale, acestea să fie funcții omogene de grad zero, adică să fie invariante în raport cu normarea coordonatelor. Revenind acum la ecuații acestea reprezintă două drepte ce se intersectează într-un *punct real*. Într-adevăr, dacă scriem ecuațiile (I.126) sub forma:

$$u + iv = \alpha \quad u - iv = \bar{\alpha}$$

unde $\bar{\alpha}$ este conjugatul complex al lui α , rezultă imediat soluția *reală* ce dă intersecția acestor drepte

$$u = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \quad v = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2} \quad (\text{I.128})$$

În raport cu potențialul care, sub condițiile (I.126) devine nul, punctul (I.128) trebuie să joace un rol esențial. El este polul unei familii aparte în planul de la infinit: *spiralele logaritmice*. Acest fapt se poate arăta cel mai ușor observînd că spirala logaritmică este un tip special de curbă *anarmonică*, adică de soluție a ecuației diferențiale:

$$v'(u) = \frac{av + bu}{cv + du} \quad (\text{I.129})$$

unde a, b, c, d sînt reale, pentru care punctele fixe ale acțiunii omografice a matricii:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{I.130})$$

sînt complexe. Aceste puncte fixe sînt soluții ale ecuației pătratice:

$$cm^2 + (d - a)m - b = 0 \quad (I.131)$$

și, după cum se poate constata ușor, sînt rapoarte ale componentelor vectorilor proprii ai matricii (I.130), ce dau direcțiile asimptotice ale curbelor familiei date de ecuația diferențială (I.129). Într-adevăr, panta tangentei la infinit a curbei dată de funcția $v(u)$ soluție a ecuației (I.129), este:

$$m_t = \lim_{u \rightarrow \infty} v'(u)$$

iar panta asimptotei este, prin definiție,

$$m_a = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{v(u)}{u}$$

și cum cele două coincid, deducem că ecuația pantei asimptotelor este chiar (I.131). Cum această ecuație are rădăcini complexe, rezultă că direcțiile asimptotice sînt drepte complexe conjugate care, așa cum am arătat, se intersectează într-un punct real, polul curbelor familiei - în speță originea.

Iată, așadar, că alternativa renunțării la ecuațiile de mișcare capătă putere de convingere prin forma însăși a mișcării, deoarece se știe faptul că, de exemplu, mișcarea galactică admite ca model spirala logaritmică. Argumentele în acest sens sînt abundente, iar cititorul interesat poate consulta pledoaria [18] în care, pe bună dreptate, galaxia e luată drept cel mai general model de reper inerțial, în sensul în care această noțiune este înțeleasă în limitele mecanicii clasice. Acest model constituie, după părerea noastră, explicația logică a noianului de fapte observate experimental începînd de la mișcările dizidente ale lunii, planetelor, navelor cosmice și terminînd cu dinamica scoarței terestre.

Analiza este tipic newtoniană, pornind de la detaliu menținerii în considerație a forței centrifuge care, pentru Newton a fost *numai* indicația existenței invers proporționale cu pătratul distanței. Fără îndoială, pledoaria autorului menționat este necesară doar în privința faptelor care, în mod obișnuit, nu sînt accesibile simțurilor ca, de exemplu, mișcarea dizidentă a cometelor, dinamica scoarței terestre sau mișcarea cu expansiune-contrație, pentru că oricine va privi o fotografie a unei galaxii tipice va fi convins de realitatea spiralei ca model de mișcare.

Ceea ce este însă important de menționat aici este faptul că această „traietorie” nu se leagă de potențial în modul obișnuit, ci numai prin direcțiile sale asimptotice. Mai precis *expresia potențialului dă direcțiile asimptotice ale mișcării*, mișcarea însăși descriindu-se funcțional în

coordonatele în care se dau ecuațiile direcțiilor asimptotice. Aceasta este de fapt, și mica legătură între potențial și matricea (I.130) ce generează mișcarea plană ale cărei traiectorii sînt spiralele logaritmice. În legătură cu acestea se poate observa, conjunctural, că în cosmologie există posibilitatea de a evita tensorul de curbura luînd ca bază a descrierii geometriei spațiului *traiectoriile* particulelor accelerate uniform [14], ceea ce are drept consecință introducerea unui tip special de coordonate, coordonatele Rindler. Una dintre virtuțile speciale a acestor coordonate, este aceea de a oferi o explicație intuitivă topologiei „stranii” introdusă de coordonatele Kruskal [14] care, la rîndul lor, s-au impus din necesitatea de a îndepărta singularitățile aparente din metrica lui Schwarzschild, luînd drept criteriu de judecată componentele tensorului de curbura contractat, singurele justificate a oferi un asemenea criteriu din punctul de vedere al teoriei lui Einstein. Ori, metricile Schwarzschild, Kruskal, Rindler, precum și altele mai generale pot fi obținute ca soluții ale ecuațiilor lui Ernst [14], în cazuri particulare de funcționalitate.

Ecuația lui Ernst se prezintă ca o alternativă convenabilă a producerii metricilor, pornind de la ideea că traiectoriile observate ale particulelor sînt cea mai clară indicație a formei și naturii cîmpurilor ce le determină. Aici, în mod clar, aceste traiectorii vor fi luate ca spirale logaritmice și ne punem problema de a găsi o legătură între ele și ecuațiile lui Ernst, insistînd asupra faptului că acestea din urmă pot fi produse ca matrici invariante pe anumite realizări ale grupului $SL(2\mathbb{R})$, ceea ce le oferă o înrudire directă cu spirala logaritimă. Această înrudire capătă, prin intermediul teoriei grupurilor, un aspect matematic concret pe care-l vom revela în cele ce urmează.

Fie u și v coordonatele planului mișcării spirale, a cărui geometrie o considerăm guvernată de grupul $SL(2\mathbb{R})$ - grup de invarianță al traiectoriilor [14]. Într-o parametrizare adecvată, generatorii infinitesimali ai acestui grup sînt dați de operatorii diferențiali.

$$A_1 = v \frac{\partial}{\partial u} \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad A_3 = -u \frac{\partial}{\partial v} \quad (I.132)$$

ce relevă o structură specifică dată prin relațiile de comutare:

$$[A_1, A_2] = A_1 ; \quad [A_2, A_3] = A_3 \dots \dots \dots (I.133)$$

Pe de altă parte, grupul $SL(2\mathbb{R})$ admite o realizare în trei variabile - grupul Barbilian. Generatorii infinitesimali ai acestui grup sînt:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ X_2 &= z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (I.134)$$

$$X_3 = z^2 \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (z - \bar{z}) K \frac{\partial}{\partial K}$$

unde z este o variabilă complexă, iar k un factor de fază

$$z = \alpha + i\beta \quad \bar{z} = \alpha - i\beta \quad K = e^{i\Phi} \quad (I.135)$$

Se observă ușor că operatorii (I.134) satisfac relațiile de comutare (I.133), așa cum e normal. Metrica invariantă a grupului Barbilian în mărimile reale α, β, Φ , e dată expresia diferențială:

$$ds^2 = - \left(d\Phi + \frac{d\alpha}{\beta} \right)^2 + \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\beta^2} \quad (I.136)$$

pînă la o constantă nesemnificativă. Metrica (I.119) este conținută aici ca un caz particular în care Φ este unghiul de paralelism al planului Lobacevski [14], și evident, și lagrangeiană (I.115) este legată tot de acest caz particular. Ecuațiile Ernst (I.114) se generalizează aici prin:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\nabla \Phi + \frac{\nabla \alpha}{\beta} \right) &= 0 \\ \nabla^2 \Phi - \nabla \Phi \frac{\nabla \beta}{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (I.137)$$

$$\nabla^2 (\ln \beta) - \nabla \Phi \frac{\nabla \alpha}{\beta} = 0$$

la care trebuie să adăugăm și condiția (I.113). Variabila unghiulară este precum se vede, superfluă pentru teoria cîmpului gravitațional staționar în vid, însă poate primi semnificații concrete în cazul considerării cîmpului electromagnetic sau nestaționar. Ea este însă desemnată să joace un rol aparte în cadrul teoriei cîmpului staționar și anume ca ligament între mișcare și cîmp, după cum vom arăta în cele ce urmează.

Pentru început să precizăm care este poziția ecuațiilor mișcării în acest context. Vom observa că acest subiect poate fi tratat prin metodele geometriei integrale punîndu-se problema familiilor de variații ale grupului SL (2R) avînd asociat grupul izomorf al lui Barbilian [16]. Aceste familii sînt soluții ale ecuațiilor cu derivate parțiale ale lui Stoka [16] care, în cazul

nostru, se scriu simbolic sub forma:

$$A_i f + X_i f = 0 \quad (I.138)$$

cu A_i dați de (I.132), X_i dați de (I.134), iar f este funcție de u, v, z, k .

Sistemul de ecuații (I.138) se rezolvă lesne prin reducere succesivă ducînd la concluzia că f este o funcție arbitrară de formațiunile invariante:

$$\mu = \frac{(v - zu)(v - \bar{z}u)}{-i(z - \bar{z})} \quad (I.139)$$

$$\gamma = \frac{v - \bar{h}u}{v - hu} k$$

care în mărimi reale se pot pune în forma:

$$\mu = \frac{(v - \alpha u)^2 + (\beta u)^2}{2\beta} \equiv \rho^2 \quad (I.140)$$

$$-i \ln \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\beta u}{v - \alpha u} + \Phi \equiv \Psi + \Phi$$

Printre familiile de varietăți invariante cu trei parametri ale grupului SL (2R), avînd asociat grupul Barbilian ca grup al parametrilor, spiralele logaritmice de ecuații:

$$\rho = k e^{m\Psi} \quad k = e^{m\Phi}$$

unde Ψ și ρ definiți în (I.140), sînt desigur, un caz particular, care însă arată în mod explicit maniera în care aceste traiectorii depind de funcțiile de câmp α, β, Φ . Problema care se opune acum este aceea a dependenței de coordonate a acestor cîmpuri, precum și a semnificației coordonatelor plane u, v .

Aparent, aceasta este o problemă falsă: nimic nu ne împiedică să considerăm planul mișcării un plan aparte, în coordonate ortogonale, de exemplu planul $z = 0$, și să acceptăm mișcarea descrisă în acest plan, simplificînd, ca atare, și ecuațiile lui Ernst. Există însă un motiv serios pentru a nu accepta o asemenea simplificare, dacă nu două, unul cosmologic și unul matematic. Motivul este acela că dacă, de exemplu, dorim să descriem relația a două galaxii nu putem afirma că planele lor sînt paralele în sens euclidian. În al doilea rînd, din punct de vedere matematic coordonatele u și v sînt coordonate centroafine, avînd deci un pronunțat caracter proiectiv. De altfel, aceste două aspecte ale problemei sînt strîns



legate unul de altul tocmai prin caracterul lor proiectiv comun.

Vom încerca, prin urmare, să dăm o soluție ecuațiilor lui Ernst, nu pretindem una generală dar, oricum, una semnificativă. Anume, avem în vedere înrudirea dintre principiul variațional Matzner-Misner ce conduce la ecuațiile Ernst, și principiul lagrangeianului geodezic, ce conduce la ecuațiile geodezicelor metrice (I.136). Din această perspectivă vom admite ipoteza că funcțiile, soluții ale ecuațiilor lui Ernst (I.137), *depind de coordonatele spațiale numai prin intermediul parametrului geodezicelor metricei (I.136)*, ce poate fi identificat, după cum se știe, cu lungimea arcului acestor geodezice. Fără îndoială că realizarea acestei ipoteze impune condiții de compatibilitate între ecuațiile Ernst și ecuațiile geodezicelor, condiții care, în principiu, se extind atât asupra potențialelor α, β, Φ , cât și asupra parametrului geodezicelor, pe care-l vom nota cu τ în cele ce urmează. Aceste condiții se pot afla lesne scriind ecuațiile (I.137) în ipoteză și comparându-le cu ecuațiile geodezicelor metrice (I.136). Așadar, ecuațiile Ernst (I.137) se vor scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \left[\Phi'' + \left(\frac{\alpha'}{\beta} \right)' \right] (\nabla \tau)^2 + \left(\Phi' + \frac{\alpha'}{\beta} \right) \nabla^2 \tau &= 0 \\ \left(\Phi'' - \Phi \frac{\beta'}{\beta} \right) (\nabla \tau)^2 + \Phi' \nabla^2 \tau &= 0 \\ \left[(\ln \beta)'' - \Phi' \frac{\alpha'}{\beta} \right] (\nabla \tau)^2 + (\ln \beta)' \nabla^2 \tau &= 0 \end{aligned} \quad (I.141)$$

în timp ce ecuațiile geodezicelor metrice (I.136) sînt:

$$\begin{aligned} \Phi'' - \Phi' \frac{\beta'}{\beta} &= 0 \\ \left(\frac{\alpha'}{\beta} \right)' + \Phi' \frac{\beta'}{\beta} &= 0 \\ (\ln \beta)'' - \Phi' \frac{\alpha'}{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (I.142)$$

unde, peste tot, am notat cu accent derivata în raport cu parametrul τ .

Avînd în vedere ecuațiile (I.142), coeficienții lui din (I.141) sînt nuli, singura condiție de asigurare a valabilității ipotezei noastre fiind τ să fie exprimabilă în coordonate spațiale printr-o soluție a ecuației lui Laplace:

$$\nabla^2 \tau = 0 \quad (I.143)$$

În afară de această condiție, asupra potențialelor α și β trebuie impusă condiția naturală ce rezultă din (I.113) și anume:

$$\nabla \left(\frac{\nabla \alpha}{\beta^2} \right) = 0 \quad (I.144)$$

Această ecuație este independentă de (I.143), constituind împreună cu ea tot ceea ce putem impune asupra funcțiilor α , β și τ , pentru a satisface ipotezei noastre.

Astfel, în această idee, problema pusă de ecuațiile lui Ernst poate fi considerată dacă vom da parametric ecuațiile geodezicelor metriciei (I.136), adică vom rezolva ecuațiile (I.142) sub condiția (I.144). Ori, acest fapt se poate realiza lesne. Din primele două ecuații (I.142) și din ultimele două, avem imediat două integrale prime:

$$\Phi' + \frac{\alpha'}{\beta} = b \quad (I.145)$$

$$\left(\frac{\alpha'}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 = a^2$$

Acum, folosind condiția (I.144) împreună cu prima ecuație (I.142) se poate arăta ușor că $b = 0$, ceea ce duce la ecuația:

$$\left(\frac{\Phi''}{\Phi'} \right)^2 = a^2 - (\Phi')^2 \quad (I.146)$$

cu soluția imediată

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = e^{a\tau} \quad (I.147)$$

După un calcul simplu vom avea atunci:

$$\alpha = \alpha_0 - a \operatorname{th} a \tau \quad (I.148)$$

$$\beta = \frac{a}{\operatorname{ch} a \tau}$$

Este de observat faptul că aceste ecuații sînt ecuații parametrice tipice pentru geodezicele planului Lobacevski, așa cum, de altfel, era de așteptat, datorită faptului că prima ecuație din (I.145) pentru $b = 0$, descrie

ecuația de definiție a unghiului de paralelism în acest plan.

Baza interpretării noastre pentru rezultatele obținute rămîne totuși ecuația (I.147) ce are aspectul tipic al unei *spirale logaritmice*, bineînțeles, cu o interpretare adecvată a unghiului Φ , prin care $\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$ să poată fi luată ca *distanță radială*. Oricum asemenea interpretare ne este totdeauna la îndemînă în special în probleme de astrofizică, în care intervin măsurători de distanțe.

Pentru aceasta ne vom referi la figura alăturată în care am exagerat intenționat proporțiile în ideea de a scoate în evidență esențialul.

Pentru a raporta distanța sa la un astru cu centrul în O , un observator situat în M are la dispoziție măsurătorile optice. Prin urmare, ceea ce el va putea raporta este distanța $MB = r$ care, evident, nu va fi exact $OM = r_0$, adică distanța geometrică radială folosită în calcule geometrice. În mod obișnuit se consideră că aceste două mărimi diferă foarte puțin din punct de vedere geometric, datorită distanțelor cosmice mari între aștri, fără a mai vorbi de modul aproximativ în care este satisfăcută legea Stefan-Boltzmann pentru radiația integrală a aștrilor, lege ce stă la baza acestui tip de măsurători astrofizice. Astfel, dacă geometric putem scrie:

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{r} = \frac{R}{r} \quad (\text{I.149})$$

unde R este raza astrului vizat, în mod obișnuit unghiul Φ se identifică cu paralaxa diametrului aparent BB' al astrului, luată din punctul de observație M . Menținînd relația (I.149) la maxima ei generalitate pe care i-o conferă geometria, este evident că $\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$ este măsură a distanței optice r dintre observator și astrul vizat, distanță care, iarăși evident, constituie și o evaluare a celei geometrice r_0 . Dacă, acum, venim cu (I.149), în (I.147) avem imediat ecuația unei spirale logaritmice:

$$r = Re^{a\tau}$$

unde τ are semnificația unghiului polar din planul traiectoriei iar a este tangenta unghiului dintre raza vectoare și direcția normalei la traiectorie care, după cum se știe, este o constantă. Relația (I.150) este cu atît mai naturală din punct de vedere geometric, cu cît are și o semnificație fizică sigură: ea este legea lui Pogson [19] ce dă relația între mărimea astrului și depărtarea sa. Prin urmare, parametrul τ al geodezicelor planului Lobacevski primește, în cazul concret al astrofizicii, semnificația fizică de mărime a unui astru.

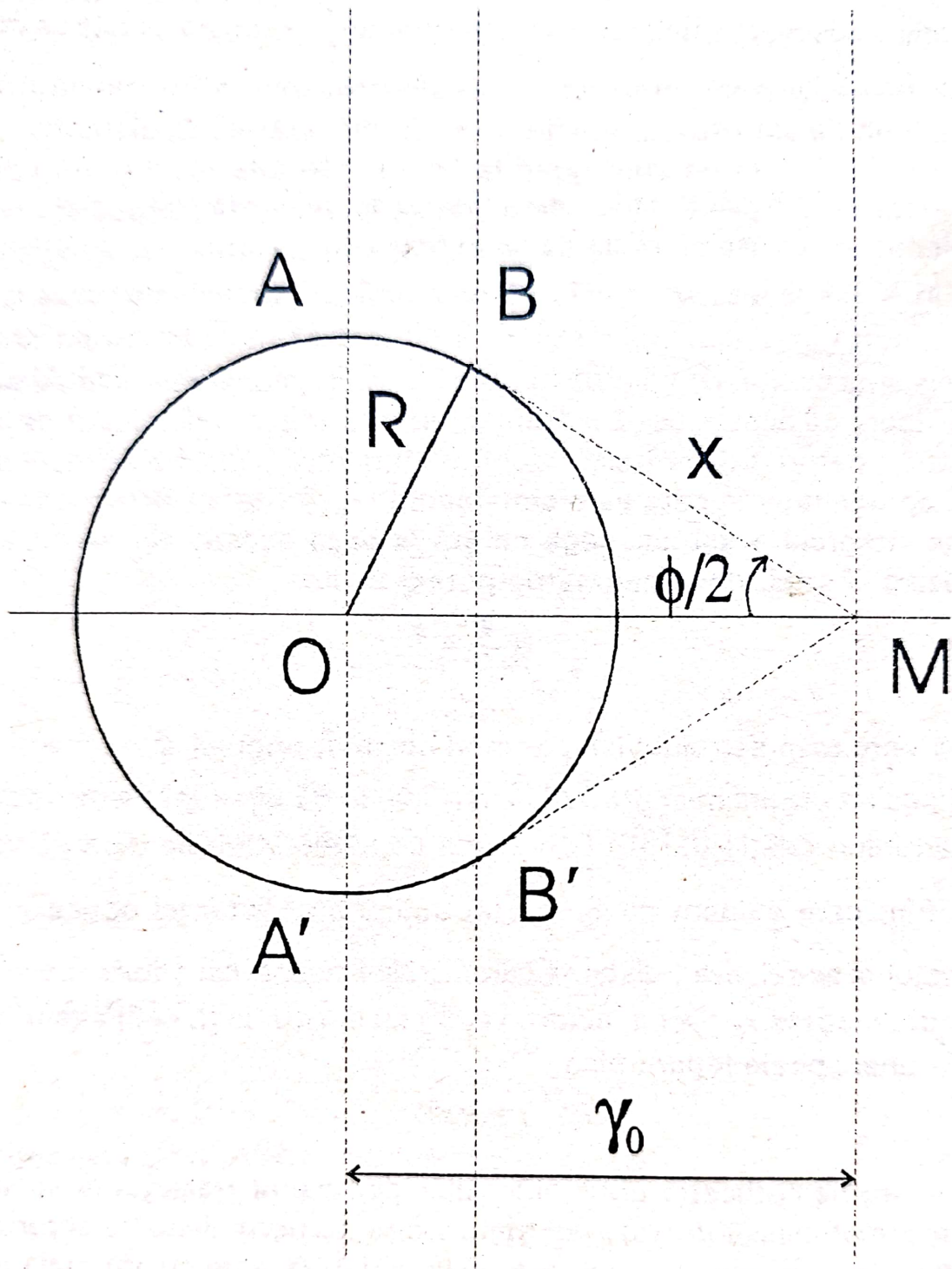


Fig. 1

Această interpretare a legii lui Pogson are un caracter aparent prohibitiv, ea fiind aplicabilă numai situațiilor în care mișcarea relativă a observatorului față de astrul vizat este o spirală logaritmică, așa cum este, de exemplu, cazul stelelor din brațele galaxiilor, față de nucleul galactic. Dar acest caracter este numai aparent, pentru că noi ținem sub rezervă faptul că τ însuși trebuie să fie o soluție a ecuației lui Laplace, și ca atare semnificația sa poate fi lărgită odată cu semnificația variabilei ce redă distanța radială.

Din acest punct de vedere, avem la dispoziție o foarte largă paletă de soluții ale ecuației Laplace ce pot fi puse în evidență în diverse moduri. Noi vom încerca să le punem în evidență doar pe cele care conduc la un vector $\vec{\omega}$ pentru metrica (I.112) fără prea multe complicații matematice.

Vom rezolva ecuația lui Laplace într-un reper cu originea geometrică fixată, de exemplu centrul O al astrului din figura anterioară. Trebuie să ne luăm precauția de a nu identifica mărimea geometrică.

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

cu distanța radială r relevantă, de exemplu, optic.

Cea mai simplă soluție a ecuației Laplace este, evident, cea cu simetrie sferică obișnuită:

$$\tau = A + \frac{B}{r_0} \quad (\text{I.151})$$

Avînd în vedere (I.148), rezultă imediat:

$$\frac{\nabla \alpha}{\beta^2} = -\nabla \tau = B \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \quad (\text{I.152})$$

cu care (I.113) devine:

$$\text{rot } \vec{\omega} = -B \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \quad (\text{I.153})$$

În acest caz, se poate găsi în mod explicit vectorul $\vec{\omega}$, și prin urmare se poate construi forma diferențială temporală din (I.112). Pentru a arăta aceasta, vom scrie rotorul în coordonate sferice, în care:

$$\text{rot } \vec{\omega} = \left\{ \frac{1}{r_0 \sin \Phi} \left(\frac{\partial \omega_\Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \omega_\varphi \sin \Phi}{\partial \Phi} \right), \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial (r_0 \omega_\varphi)}{\partial r_0} - \frac{1}{\sin \Phi} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \Phi} - \frac{\partial (r_0 \omega_\Phi)}{\partial r_0} \right) \right\} \quad (\text{I.154})$$

Aici r_0 , Φ , φ au semnificațiile geometrice obișnuite de coordonate sferice, și nu le identificăm, așa cum am convenit, cu vreo coordonată relevantă în mod fizic.

Acum, din (I.153) rezultă imediat:

$$\frac{\partial \omega_\Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\omega_\varphi \sin \Phi)}{\partial \Phi} = -\frac{v}{r_0^2}$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \Phi} - \frac{\partial(r_0 \omega_r)}{\partial r_0} = 0 \quad (\text{I.155})$$

$$\frac{\partial(r_0 \omega_\varphi)}{\partial r_0} - \frac{1}{\sin \Phi} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} = 0$$

și putem încerca o soluție în care numai componenta ω_φ a lui $\vec{\omega}$ să fie nenulă, în care caz obținem ușor o funcție de forma:

$$\omega_\varphi = -\frac{B}{r_0} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (\text{I.156})$$

Acest caz se poate generaliza la o simetrie cilindrică, pentru o soluție a ecuației Laplace ce se poate scrie sub forma unei sume de trei funcții: una depinzînd numai de r_0 , una depinzînd numai de θ și una depinzînd numai de φ .

A fortiori o asemenea funcție se scrie sub forma:

$$\tau = A + \frac{2B}{r_0} + 2C \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + D\varphi \quad (\text{I.157})$$

unde A, B, C, D sînt constante. Dacă $\vec{\omega}$ nu depinde de φ , atunci putem da o soluție ce generalizează pe cea din (I.156) sub forma

$$\omega_r = f(r_0)$$

$$\omega_\Phi = Cr_0$$

$$\omega_\varphi = -\frac{A}{r_0} \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} - B \frac{r_0}{\sin \Phi} \quad (\text{I.158})$$

unde $f(r_0)$ e o funcție arbitrară de r_0 .

Rezultatele de pînă acum sînt suficiente pentru cîteva comentarii conclu-

sive. Mai întâi este necesar să observăm că potențialul clasic joacă un rol aparte în cadrul unei teorii bazate pe ecuațiile lui Ernst. El este parametrul geodezicelor planului Lobacevski aferent grupului SL (2R). Foarte rar, doar accidental, se scoate în evidență faptul că forța newtoniană, în afară de faptul că derivă din potențial - mai are și darul că este un „cîmp de vîrtej” (ecuația (I.153)), teoria actuală relevînd faptul că tocmai aceasta este virtutea sa esențială. Pentru acest tip de forță faptul că este simultan și gradient al unui cîmp scalar și rotor al unui cîmp vectorial este cu totul accidental, însă aspectul rotațional nu poate fi luat în considerare în limitele mecanicii clasice. După cum se știe [14], în cadrul teoriei relativității generale, vectorul $\vec{\omega}$ este legat de sincronizarea pe o regiune spațială dată. Dacă rotorul său - și deci forța - este nul, toate ceasornicele sînt perfect sincronizate, astfel încît vectorul forță îi poate fi pusă în sarcină nesincronizarea ceasornicelor. Un aspect concret este dat de relația (I.156): ea reprezintă un cîmp tipic de viteze „de vîrtej” în jurul parabolei de colatitudine θ , din care forța derivă rotațional. Acest fapt atrage atenția asupra precauției ce trebuie să ne-o luăm în aplicarea celui de al treilea principiu al dinamicii în problema de mișcare, a cărui formă corectă ar trebui să fie o relație de tipul (I.153). Numai că, și această formă este accidentală: lăsînd la o parte faptul că este obținută ca beneficiu al relației (I.113), și că dependența de variabilele spațiale se face numai prin intermediul potențialului, ea este particulară prin însăși potențialul (I.151). Pentru un potențial de tipul (I.157) este greu să mai vorbim de cîmpuri de vîrtej ca $\vec{\omega}$ din (I.156), după cum se poate constata ușor din relațiile (I.158).

În al doilea rînd, parametrul și mărimile ce derivă din el, $\alpha, \beta, \vec{\omega}$, depind numai de coordonatele geometrice r_0, θ, φ . Cum am subliniat cel puțin pentru r_0 , deosebirea față de coordonata analoagă - fizică - r este de *esență*. Aceasta o deducem nu cu ajutorul figurii din care am ilustrat semnificația lui Φ - din care rezultă că r și r_0 sînt proporționale - ci cu ajutorul relației definitorii (I.150), pe care citim că r este o coordonată *plană*. Într-adevăr, avem:

$$\tau = \frac{1}{a} \ln \frac{R}{r} \quad (\text{I.159})$$

Dacă acum aplicăm în dreapta și în stînga acestei egalități operatorul lui Laplace, și ținem cont de faptul că τ este o soluție a ecuației lui Laplace, identificînd r cu coordonata radială, ajungem la o construcție: în partea dreaptă a lui (I.159) nu vom avea zero. τ din (I.159) este soluție a ecuației lui Laplace numai în cazul *bidimensional*, cum, de altfel este și normal.



Într-adevăr, cu spirala logaritmică (I.150) ne aflăm, așa cum am arătat, în planul de la infinit, și prin urmare r este variabila ce trebuie identificată cu ρ din (I.140), evident pentru $r \rightarrow \infty$, în care caz α și β nu depind decât de θ și φ . Aceasta relevă, în cea mai mare măsură caracterul ipotetic al variabilei geometrice r_0 , atât de mult discutat din diverse puncte de vedere, culminând cu cel al relativității generale. După părerea noastră, esențial este caracterul de imposibilitate a determinării originii reperului ce a apărut ca o contradicție începând chiar de la Newton.

Iată așadar că în teoria relativității generale forța și potențialul au semnificația unor mărimi primordiale. Maniera în care am dedus aceste semnificații indică existența unor concepte unificatoare pentru care respectivele noțiuni sînt doar aspecte particulare. În principal avem legile de conservare ale energiei: din prezenta perspectivă ele par să redea aceleași aspecte particulare ale unui concept unificator ca și forțele sau potențialele. O a doua concluzie ce se poate extrage este cea legată de limita asimptotică în distanța radială geometrică: ea duce la o măsură a distanței de natură cu totul diferită sub aspectul măsurătorii. Vedem aici o generalizare a teoremei Bondi-Matzner-Sachs, și deci o manieră de a impune teoriei considerente relativiste.

I.5 UNELE OBSERVAȚII ASUPRA MĂSURĂTORILOR DE TIP COULOMB* (N.Mazilu, M.Agop)

În cele ce urmează să ne referim la lucrarea lui Katz [20] dedicată unei analize amănunțite și interpretării situației existente în electrodinamică, generată de discrepanța între faptul că se admit ca mărimi măsurabile intensitățile cîmpului electric și magnetic, deci în total șase mărimi, în timp ce tensorul tensiunilor cîmpului electromagnetic, care în mod normal, conține toată informația asupra cîmpului, are numai *cinci* componente independente. Katz arată că aceasta se datorează faptului că tensorul tensiunilor cîmpului electromagnetic este invariant la transformarea cu un parametru:

* N.Mazilu, M.Agop, T.Horgoș, *Lucrare nepublicată*

$$\vec{E}_1 = \cos \Phi \vec{E} + \sin \Phi \vec{B} \quad (I.160)$$

$$\vec{B}_1 = -\sin \Phi \vec{E} + \cos \Phi \vec{B}$$

unde cu $\vec{E}$ am notat intensitatea câmpului electric, iar cu $\vec{B}$ - inducția câmpului magnetic. Această transformare este cunoscută sub numele de transformare de densitate și a fost, pentru prima dată, relevată de Rainich [20].

Important pentru noi este însă faptul că, din perspectiva acestei transformări, ecuațiile Maxwell ascund în ele posibilitate existenței monopolului magnetic. Într-adevăr, dacă admitem că, de exemplu electronul, posedă și o sarcină magnetică, atunci forța statică ce acționează asupra sa într-un câmp electromagnetic va fi:

$$\vec{F}_{st} = e\vec{E} + \mu\vec{B} \quad (I.161)$$

unde μ sarcina magnetică a electronului.

Ecuațiile Maxwell-Lorentz pentru câmpul electromagnetic vor fi atunci simetrice:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= 4\pi e\rho & \nabla \vec{B} &= 4\pi \mu\rho \\ \nabla \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \end{aligned} \quad (I.162)$$

$$\nabla \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e \vec{j}$$

Aici am notat cu ρ densitatea electronilor, iar cu $\vec{j}$ curentul asociat acestei densități. Acum, dacă în (I.162) aplicăm transformarea (I.163) cu:

$$\Phi = \arctg \frac{\mu}{e} \quad (I.163)$$

aceste ecuații revin la forma cunoscută:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E}_1 &= 4\pi q\rho \quad ; \quad \nabla \vec{B}_1 = 0 \\ \nabla_x \vec{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \nabla_x \vec{B}_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + 4\pi q\vec{j} \end{aligned} \quad (I.164)$$

în care noua sarcină electrică este dată de

$$q^2 = e^2 + \mu^2 \quad (I.165)$$

Conchidem astfel că dacă (I.161) este luată ca forță asupra unei sarcini într-un câmp electric și magnetic, nu se poate distinge realmente între setul de ecuații (I.162) și cel din (I.164).

Totdeauna se poate defini un câmp nedivergent B_1 prin a doua ecuație (I.162), iar prima ecuație (I.162) arată că electronul prezintă sarcina q în câmpul electric de intensitate E_1 , forța asupra sa fiind pur electrostatică, dată de $q E_1$. Așadar, de exemplu, un experiment de tip Milikan nu va pune în evidență sarcina e ci sarcina q . Dar, în afară de aceasta, lucrarea lui Katz relevă însă un fapt demn de reținut pentru ceea ce ne interesează pe noi acum. Analiza unui experiment de tip Coulomb pentru măsurarea sarcinii q relevă pentru forța pur electrică generată între două sarcini e și pentru cea pur magnetică, între sarcinile magnetice μ corespunzătoare, aceeași dependență spațială, anume proporționalitatea cu inversul pătratului distanței. Astfel, relația (I.165) apare ca o consecință naturală a similarității între expresia forței pur electrice și cea a forței pur magnetice. De aici rezultă două concluzii importante pentru dezvoltarea ce o urmărim acum. În primul rând, considerațiile asupra forțelor pot fi externe, cu egală îndreptățire și asupra energiilor potențiale, sarcina q din (I.165) trebuind să apară în expresia potențialului. Apoi, concluzia exprimată prin (I.165) este independentă de mărimea q a sarcinii, deci de particula avută în vedere. Raționamentul lui Katz poate fi aplicat la fel de bine asupra bobiței de soc, a protonului, electronului sau a oricărei alte particule încărcate.

Rezultă așadar, că există două variabile independente ce pot descrie mulțimea experimentelor de tip Coulomb cu particule încărcate: una dintre ele este unghiul Φ din (I.163) care reflectă invarianța legilor electrodinamicii cealaltă este sarcina q ce reflectă invarianța relației (I.165) în raport cu mulțimea experimentelor de tip Coulomb. Vorbim de aceeași familie cu 2 parametri evidențiați în paragraful precedent.

BIBLIOGRAFIE

1. V.G.Boltyanskiy, *Differentsial'nye aravneniya*, 10, 12, 1974.
2. V.G.Boltyanskiy, *Differentsial'nye aravneniya*, 15, 10, 1979.
3. V.G.Boltyanskiy, *Differentsial'nye aravneniya*, 15, 11, 1979.
4. V.G.Boltyanskiy, *Differentsial'nye aravneniya*, 16, 3, 1980.

5. V.G.Boltyanskiy, *Problems of Control and Information Theory*, 10, 4, 1981.
6. E.A.Milne, *Kinematic Relativity*, Oxford, The Clarendon Press, 1984.
7. V.Oegorov, *Théorie de la relativité restreinte*, Edition Mir, Moscou, 1979.
8. V.A.Fock, *Teoria spațiului, timpului și gravitației*, Editura Academiei, București, 1962.
9. T.Horgos, M.Agop, *Lucrare nepublicată*.
10. L.Poutriagvine, V.Boltyanskiy, R.Gomkralize, E.Michtcgeuko, *Téorie mathématique des processus optimaux*, Editions Mir Moscou, 1974.
11. T.Horgos, M.Agop, *Lucrare nepublicată*.
12. K.E.Eriksson, *Arkiv för Fysic*, 25, Nr.15, 167, 1964.
13. N.Ionescu Pallas, *Relativitate generală și cosmologie*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1980.
14. M.Agop, N.Mazilu, *Fundamente ale fizicii moderne*, Editura Junimea, Iași, 1989.
15. M.Agop, G.Zet, *Memoriile secțiilor științifice*, IV, XI, 1, 93, 1988.
16. N Mazilu, *Comunicare Privată*.
17. A.Einstein, *Teoria Relativității*, Editura Tehnică, București, 1957.
18. M Agop, *Probleme de invariantă și haos în teoria mișcării*, Editura G.Asachi, Iași, 1992.
19. G.Demetrescu, C.Pîrvulescu, *Galaxiii în univers*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1967.
20. N.Mazilu, *Comunicare Privată*.

II. TEORII FIZICE ÎN BAZE CARTAN*

(M. Agop)

Majoritatea teoriilor fizice au fost elaborate în baze olonome [1]. Însă procesul de măsură, așa cum rezultă și din capitolul I, implică interacția sistem fizic-aparat de măsură avînd ca rezultat perturbarea primului. În consecință sistemul fizic va fi supus unor constrîngerii exterioare ceea ce va necesita introducerea bazelor Cartan. O discuție amănunțită asupra acestor probleme se face în [1] și [2].

În cele ce urmează vom reformula teoriile „gauge” și teoria gravitației în baze Cartan.

II.1 ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ ÎN BAZE CARTAN

Fie M o varietate diferențiabilă pe care fixăm un punct X de coordonate (X^σ) $\sigma = 1, 2, \dots$. Construim în acest punct spațiul tangent T_x . Pe spațiul tangent alegem o bază necomutativă (e_μ) , numită bază Cartan, ce satisface relația [3]:

$$[e_\mu, e_\nu] = C_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma \quad (\text{II.1})$$

unde $C_{\mu\nu}^\sigma$ sînt coeficienții de comutare ai bazei cu proprietatea că:

$$C_{\mu\nu}^\sigma = -C_{\nu\mu}^\sigma \quad (\text{II.2})$$

Obs. În cazul particular al bazelor de coordonate numite și baze olonome:

* M. Agop, *Lucrare nepublicată*

$$e_\mu \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (II.3)$$

iar relația (II.1) ia forma simplă

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0 \quad (II.4)$$

Aceasta înseamnă că pentru asemenea baze coeficienții de comutare sînt nuli.

Față de baza (II.1), oricare două cîmpuri vectoriale u și v se scriu [3]:

$$v = v^\sigma e_\sigma \quad (II.5)$$

respectiv

$$u = u^\rho e_\rho \quad (II.6)$$

În continuare definim derivata covariantă a cîmpului vectorial v pe direcția cîmpului u astfel [3]:

$$\begin{aligned} \nabla_u v &= \nabla_{u^\rho e_\rho} v^\sigma e_\sigma = u^\rho \nabla_{e_\rho} (v^\sigma e_\sigma) = \\ &= u^\rho [\nabla_{e_\rho} (v^\sigma) e_\sigma + v^\sigma \nabla_{e_\rho} e_\sigma] = \\ &= u^\rho [e_\rho (v^\sigma) e_\sigma + v^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\mu e_\mu] = \\ &= u^\rho [e_\rho (v^\sigma) + v^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma] e_\sigma \end{aligned} \quad (II.7)$$

unde $\Gamma_{\sigma\rho}^\mu$ sînt coeficienții de conexiune dați prin relația [3]:

$$\nabla_{e_\rho} e_\sigma = \Gamma_{\sigma\rho}^\mu e_\mu \quad (II.8)$$

Evident, pentru $u^\rho = \delta_\alpha^\rho$ relația anterioară ia forma:

$$\nabla_{e_\alpha} (v^\sigma e_\sigma) = [e_\alpha (v^\sigma) + v^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma] e_\sigma \quad (II.9)$$

sau încă, pe baza notației:

$$\nabla_{e_\alpha} (v^\sigma e_\sigma) = (D_\alpha v^\sigma) e_\sigma \quad (II.10)$$

derivata covariantă clasică pe componente [3]:

$$D_\alpha v^\sigma = e_\alpha v^\sigma + v^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \quad (II.11)$$

În conexiunea (II.8) torsiunea [3]:

$$T(v, u) = \nabla_v u - \nabla_u v - [v, u] \quad (II.12)$$

avînd în vedere (II.5) și (II.6), devine:

$$\begin{aligned} T(v^\sigma e_\sigma, u^\rho e_\rho) &= \nabla_{v^\sigma e_\sigma} (u^\rho e_\rho) - \nabla_{u^\rho e_\rho} (v^\sigma e_\sigma) - [v^\sigma e_\sigma, u^\rho e_\rho] = \\ &= v^\sigma [e_\sigma(u^\rho) + u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho] e_\rho - u^\rho [e_\rho(v^\sigma) + v^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma] e_\sigma - v^\sigma e_\sigma(u^\rho e_\rho) + \\ &+ u^\rho e_\rho(v^\sigma e_\sigma) = v^\sigma e_\sigma(u^\rho) e_\rho + v^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho e_\rho - u^\rho e_\rho(v^\sigma) e_\sigma - \\ &- u^\rho v^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma e_\sigma - v^\sigma e_\sigma(u^\rho) e_\rho - v^\sigma u^\rho e_\sigma(e_\rho) + u^\rho e_\rho(v^\sigma) e_\sigma + \\ &+ u^\rho v^\sigma e_\rho e_\sigma = v^\sigma u^\rho (\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu) e_\mu + v^\sigma u^\rho (e_\rho e_\sigma - e_\sigma e_\rho) = \\ &= v^\sigma u^\rho \{ (\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu) e_\mu + [e_\rho, e_\sigma] \} = v^\sigma u^\rho [\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu - C_{\sigma\rho}^\mu] e_\mu \end{aligned} \quad (II.13)$$

sau încă, introducînd tensorul de torsiune $T_{\sigma\rho}^\mu$:

$$T(v^\sigma e_\sigma, u^\rho e_\rho) = v^\sigma u^\rho T_{\sigma\rho}^\mu e_\mu \quad (II.14)$$

Expresia tensorului $T_{\sigma\rho}^\mu$ este dată de relația:

$$T_{\sigma\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu - C_{\sigma\rho}^\mu \quad (II.15)$$

și se obține identificînd (II.13) cu (II.14).

Aceeași relație (II.15) se obține însă direct dacă în (II.13) sînt admise identificările:

$$v^\sigma = \delta_\mu^\sigma, \quad u^\rho = \delta_\omega^\rho \quad (II.16)$$

Rezultă:

$$T(e_\mu, e_\omega) = \{ \nabla_{e_\mu} e_\omega - \nabla_{e_\omega} e_\mu - [e_\mu, e_\omega] \} = (\Gamma_{\omega\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\omega}^\sigma - C_{\mu\omega}^\sigma) = T_{\mu\omega}^\sigma e_\sigma \quad (II.17)$$

de unde se deduce (II.15).

Obs. Într-o bază de coordonate

$$T_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i \quad (II.18)$$

Pentru conexiunea (II.8) curbura [3]:

$$R(v, u) \omega = \nabla_v (\nabla_u \omega) - \nabla_u (\nabla_v \omega) - \nabla_{[v, u]} \omega$$

cu

$$\omega = \omega^\omega e_\omega \quad (II.19)$$

și relațiile (II.5) și (II.6), are forma explicită:

$$\begin{aligned}
 R(v, u) \omega &= \nabla_{v^\sigma e_\sigma} \{u^p [e_p(\omega^\omega) + \omega^\alpha \Gamma_{\alpha p}^\omega] e_\omega\} - \nabla_{u^p e_p} \{v^\sigma [e_\sigma(\omega^\omega) + \omega^\alpha \Gamma_{\alpha \sigma}^\omega] e_\omega\} - \\
 &- \nabla_{[v^\sigma e_\sigma, u^p e_p]} (\omega^\omega e_\omega) = v^\sigma e_\sigma (u^p) e_p(\omega^\omega) e_\omega + v^\sigma u^p e_\sigma e_p(\omega^\omega) e_\omega + \\
 &+ v^\sigma e_\sigma (u^p) \omega^\alpha \Gamma_{\alpha p}^\omega e_\omega + v^\sigma u^p e_\sigma (\omega^\alpha) \Gamma_{\alpha p}^\omega e_\omega + v^\sigma u^p \omega^\alpha e_\sigma \Gamma_{\alpha p}^\omega e_\omega + \\
 &+ v^\sigma u^p e_p(\omega^\beta) \Gamma_{\beta \sigma}^\omega e_\omega + v^\sigma u^p \omega^\gamma \Gamma_{\gamma p}^\beta \Gamma_{\beta \sigma}^\omega e_\omega - u^p e_p (v^\sigma) e_\sigma(\omega^\omega) e_\omega - \\
 &- u^p v^\sigma e_p e_\sigma(\omega^\omega) e_\omega - u^p e_p (v^\sigma) \omega^\alpha \Gamma_{\alpha \sigma}^\omega e_\omega - u^p v^\sigma e_p(\omega^\alpha) \Gamma_{\alpha \sigma}^\omega e_\omega + \\
 &+ u^p v^\sigma \omega^\alpha e_p \Gamma_{\alpha \sigma}^\omega e_\omega - u^p v^\sigma e_\sigma(\omega^\beta) \Gamma_{\beta p}^\omega e_\omega - u^p v^\sigma \omega^\alpha \Gamma_{\gamma \sigma}^\beta \Gamma_{\beta p}^\omega e_\omega - \\
 &- \nabla_{v^\sigma u^p [e_\sigma, e_p] + v^\sigma e_\sigma (u^p) - u^p e_p (v^\sigma) e_\sigma} (\omega^\omega e_\omega) = v^\sigma e_\sigma (u^p) e_p(\omega^\omega) e_\omega + \\
 &+ v^\sigma e_\sigma(\omega^p) \omega^\alpha \Gamma_{\alpha p}^\omega e_\omega - u^p e_p (v^\sigma) e_\sigma(\omega^\omega) e_\omega - u^p e_p (v^\sigma) \omega^\alpha \Gamma_{\alpha \sigma}^\omega e_\omega + \\
 &+ v^\sigma u^p [e_\sigma, e_p] (\omega^\omega) e_\omega + u^p v^\sigma \omega^\omega [e_\sigma \Gamma_{\omega p}^\alpha - e_p \Gamma_{\omega \sigma}^\alpha] e_\alpha + \\
 &+ u^p v^\sigma \omega^\omega [\Gamma_{\omega p}^\beta \Gamma_{\beta \sigma}^\alpha - \Gamma_{\omega \sigma}^\beta \Gamma_{\beta p}^\alpha] e_\alpha - v^\sigma u^p \omega^\omega C_{\sigma p}^\gamma \Gamma_{\omega \gamma}^\alpha e_\alpha - \\
 &- v^\sigma u^p [e^\sigma, e_p] (\omega^\omega) e_\omega - v^\sigma e_\sigma (u^p) e_p(\omega^\omega) e_\omega - v^\sigma e_\sigma (u^p) \omega^\alpha \Gamma_{\alpha p}^\omega e_\omega + \\
 &+ u^p e_p (v^\sigma) e_\sigma(\omega^\omega) e_\omega + u^p e_p (v^\sigma) \omega^\alpha \Gamma_{\alpha \sigma}^\omega e_\omega = \\
 &= \omega^\omega v^\sigma u^p [e_\sigma v \Gamma_{\omega p}^\alpha - e_p \Gamma_{\omega \sigma}^\alpha + \Gamma_{\omega p}^\beta \Gamma_{\beta \sigma}^\alpha - \Gamma_{\omega \sigma}^\beta \Gamma_{\beta p}^\alpha - C_{\sigma p}^\gamma \Gamma_{\omega \gamma}^\alpha] e_\alpha
 \end{aligned} \tag{II.20}$$

și se mai poate încă transforma pe baza tensorului de curbura $R_{\omega \sigma p}^\alpha$ astfel:

$$R(v^\sigma e_\sigma, u^p e_p) \omega^\omega e_\omega = \omega^\omega v^\sigma u^p R_{\omega \sigma p}^\alpha e_\alpha \tag{II.21}$$

Expresia tensorului de curbura este dată de relația [3]:

$$R_{\omega \sigma p}^\alpha = e_\sigma \Gamma_{\omega p}^\alpha - e_p \Gamma_{\omega \sigma}^\alpha + \Gamma_{\omega p}^\beta \Gamma_{\beta \sigma}^\alpha - \Gamma_{\omega \sigma}^\beta \Gamma_{\beta p}^\alpha - C_{\sigma p}^\gamma \Gamma_{\omega \gamma}^\alpha \tag{II.22}$$

și se obține identificînd (II.21) cu (II.20).

Pentru

$$v^\sigma = \delta_p^\sigma ; \quad u^p = \delta_\mu^p ; \quad \omega^\omega = \delta_\gamma^\omega \tag{II.23}$$

relația (II.20) devine:

$$\begin{aligned}
 R(e_\beta, e_\mu) e_\nu &= [\nabla_{e_\beta} \nabla_{e_\mu} e_\nu - \nabla_{e_\mu} \nabla_{e_\beta} e_\nu - \nabla_{[e_\beta, e_\mu]} e_\nu] = \\
 &= \nabla_{e_\beta} (\Gamma_{\nu\mu}^\alpha e_\alpha) - \nabla_{e_\mu} (\Gamma_{\nu\beta}^\alpha e_\alpha) - \nabla_{C_{\beta\mu}^\gamma e_\gamma} e_\nu = \\
 &= e_\beta \Gamma_{\nu\mu}^\omega e_\omega - e_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\omega e_\omega + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\omega e_\omega - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\omega e_\omega - C_{\beta\mu}^\gamma \nabla_{e_\gamma} e_\nu = \\
 &= [e_\beta \Gamma_{\nu\mu}^\omega - e_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\omega + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\omega - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\omega - C_{\beta\mu}^\gamma \Gamma_{\nu\gamma}^\omega] e_\omega = R_{\nu\beta\mu}^\omega e_\omega
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

ceea ce conduce și ea la relația (II.22).

Obs. Într-o bază de coordonate

$$R_{jke}^i = \frac{\partial \Gamma_{je}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^e} + \Gamma_{je}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{me}^i \tag{II.25}$$

Se observă direct din (II.19) că:

$$R(\nu, u) \omega = -R(u, \nu) \omega \tag{II.26}$$

ceea ce implică:

$$R_{\omega\sigma\rho}^\alpha = -R_{\rho\sigma\omega}^\alpha \tag{II.27}$$

adică antisimetria tensorului de curbura în indicii ω și ρ .

Curbura (II.22) mai satisface și identitățile lui Bianchi [3]:

$$R(\nu, u) \omega + R(u, \omega) \nu + R(\omega, \nu) u = 0 \tag{II.28}$$

respectiv

$$(\nabla_\nu R)(u, \omega) + (\nabla_u R)(\omega, \nu) + (\nabla_\omega R)(\nu, u) = 0 \tag{II.29}$$

Prima identitate (II.28) se obține observînd mai întîi că

$$R(\nu, u) \omega = \nabla_\nu (\nabla_u \omega) - \nabla_u (\nabla_\nu \omega) - \nabla_{[\nu, u]} \omega \tag{II.30}$$

$$R(\omega, \nu) u = \nabla_\omega (\nabla_\nu u) - \nabla_\nu (\nabla_\omega u) - \nabla_{[\omega, \nu]} u \tag{II.31}$$

$$R(u, \omega) \nu = \nabla_u (\nabla_\omega \nu) - \nabla_\omega (\nabla_u \nu) - \nabla_{[u, \omega]} \nu \tag{II.32}$$

În continuare, efectuînd sumarea acestora vom avea [3]:

$$\begin{aligned}
 R(\nu, u) \omega + R(\omega, \nu) u + R(u, \omega) \nu &= \nabla_\nu [u, \omega] + \nabla_\omega [\nu, u] + \nabla_u [\omega, \nu] - \\
 &- (\nabla_{[\nu, u]} \omega + \nabla_{[\omega, \nu]} u + \nabla_{[u, \omega]} \nu) = [\nu, [u, \omega]] + [u, [\omega, \nu]] + [\omega, [\nu, u]]
 \end{aligned} \tag{II.33}$$

de unde, în virtutea identității Jacobi [3]:

$$[v, [u, \omega]] + [u, [\omega, v]] + [\omega, [v, u]] = 0 \quad (II.34)$$

rezultă (II.28).

Pentru cea de-a doua identitate Bianchi (II.29) se are în vedere faptul că [3]:

$$\begin{aligned} \nabla_v(R(u, \omega)\gamma) &= (\nabla_v R)(u, \omega)\gamma + R(\nabla_v u, \omega)\gamma + \\ &+ R(u, \nabla_v \omega)\gamma + R(u, \omega)\nabla_v \gamma = 0 \end{aligned} \quad (II.35)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\omega(R(v, u)\gamma) &= (\nabla_\omega R)(v, u)\gamma + R(\nabla_\omega v, u)\gamma + R(v, \nabla_\omega u)\gamma + \\ &+ R(v, \nabla_\omega u)\gamma + R(v, u)\nabla_\omega \gamma = 0 \end{aligned} \quad (II.36)$$

$$\begin{aligned} \nabla_u(R(\omega, v)\gamma) &= (\nabla_u R)(\omega, v)\gamma + R(\nabla_u \omega, v)\gamma + R(\omega, \nabla_u v)\gamma + \\ &+ R(\omega, v)\gamma = 0 \end{aligned} \quad (II.37)$$

Rezultă, folosind și proprietățile (II.28) și (II.34) [3]:

$$\begin{aligned} &(\nabla_v R)(u, \omega)\gamma + (\nabla_\omega R)(v, u)\gamma + (\nabla_u R)(\omega, v)\gamma = \nabla_v \{ \nabla_u (\nabla_\omega \gamma) - \\ &- \nabla_\omega (\nabla_u \gamma) - \nabla_{[u, \omega]} \gamma \} + \nabla_\omega \{ \nabla_v (\nabla_u \gamma) - \nabla_u (\nabla_v \gamma) - \nabla_{[v, u]} \gamma \} + \nabla_u \{ \nabla_\omega (\nabla_v \gamma) - \\ &- \nabla_v (\nabla_\omega \gamma) - \nabla_{[\omega, v]} \gamma \} - R(\nabla_v u, \omega)\gamma - R(\nabla_\omega v, u)\gamma - R(\nabla_u \omega, v)\gamma + \\ &+ R(\nabla_v \omega, u)\gamma + R(\nabla_\omega u, v)\gamma + R(\nabla_u v, \omega)\gamma - [\nabla_u \nabla_\omega \nabla_v \gamma - \nabla_\omega \nabla_u \nabla_v \gamma - \\ &- \nabla_{[u, \omega]} \nabla_v \gamma] - [\nabla_v \nabla_u \nabla_\omega \gamma - \nabla_u \nabla_v \nabla_\omega \gamma - \nabla_{[v, u]} \nabla_\omega \gamma] - [\nabla_\omega \nabla_v \nabla_u \gamma - \\ &- \nabla_v \nabla_\omega \nabla_u \gamma - \nabla_{[\omega, v]} \nabla_u \gamma] = [\nabla_{[v, u]} \nabla_\omega \gamma - \nabla_\omega \nabla_{[v, u]} \gamma - \nabla_{[[v, u], \omega]} \gamma] + \\ &+ \nabla_{[\omega, v]} \nabla_u \gamma - \nabla_u \nabla_{[\omega, v]} \gamma - \nabla_{[[\omega, v], u]} \gamma + \nabla_{[u, \omega]} \nabla_v \gamma - \nabla_v \nabla_{[u, \omega]} \gamma - \\ &- \nabla_{[[u, \omega], v]} \gamma] + \nabla_{[v, u]} \nabla_\omega \gamma + \nabla_{[\omega, v]} \nabla_u \gamma + \nabla_{[u, \omega]} \nabla_v \gamma - \nabla_v \nabla_{[u, \omega]} \gamma - \\ &- \nabla_\omega \nabla_{[v, u]} \gamma - \nabla_u \nabla_{[\omega, v]} \gamma = \nabla_{([v, u], \omega) + [\omega, v], u) + [u, \omega], v)} = 0 \end{aligned} \quad (II.38)$$

adică tocmai relația (II.29).

Echivalentele identităților Bianchi (II.28) și (II.29), folosind componentele tensorului de curbura (II.22) sînt:

$$R_{\omega\sigma\rho}^{\alpha} + R_{\rho\omega\sigma}^{\alpha} + R_{\sigma\rho\omega}^{\alpha} = 0 \quad (\text{II.39})$$

respectiv

$$\nabla_{\mu} R_{\omega\sigma\rho}^{\alpha} + \nabla_{\rho} R_{\omega\mu\sigma}^{\alpha} + \nabla_{\sigma} R_{\omega\rho\mu}^{\alpha} = 0 \quad (\text{II.40})$$

II.2 TEORII GAUGE ÎN BAZE CARTAN

În acest scop vom urmări lucrarea [10]. Un grup Lie G definit pe varietate va acționa atât asupra coordonatelor (x_{μ}) cât și asupra unor funcții $\Psi(x_{\mu})$ din aceeași varietate. Generatorii (X_A) , $A = 1, 2, \dots$ ai grupului G satisfac relațiile:

$$[X_A, X_B] = \int_{AB}^C X_C \quad (\text{II.41})$$

cu

$$\int_{AB}^C = - \int_{BA}^C \quad (\text{II.42})$$

relațiile ce constituie ecuațiile de structură ale algebrei lui G . Reprezentarea adjuncă a algebrei lui G este definită peste spațiul algebrei însăși

$$X_A \rightarrow Ad(X_A) \quad (\text{II.43})$$

cu

$$[Ad(X_A)](X_B) = [X_A, X_B] = \int_{AB}^C X_C \quad (\text{II.44})$$

Dacă se consideră un element arbitrar din algebra grupului G

$$X = \alpha^B X_B, \quad \alpha_B = \text{const.} \quad (\text{II.45})$$

atunci:

$$[Ad(X_A)](X) = [X_A, X] = [X_A, \alpha^B X_B] = \alpha^B [X_A, X_B] = \alpha^B \int_{AB}^C X_C \quad (II.46)$$

Construim acum un fibrat principal $P(G, M)$ cu grupul structural G și avînd varietatea M . În P introducem o conexiune prin definirea derivatei covariante [4]:

$$D_\mu = e_\mu + ig h_\mu^A X_A \quad (II.47)$$

unde $h_\mu^A(x_\mu)$ sînt cîmpuri de etalon asociate generatorilor X_A și g o constantă de cuplaj, cîmpul de vectori e_μ satisfăcînd relația (II.41).

Presupunem de asemenea că mărimile h_μ^A (cîmpurile de etalon) aparțin reprezentării adjuncte a grupului G , adică satisfac relația [3]:

$$X_A(h^B) = \int_{CA}^B h^C \quad (II.48)$$

și se comportă ca un vector (în raport cu indicele μ) la transformările generale de coordonate $x'_\mu = x'_\mu(x^\nu)$

$$h'^A_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} h^A_\nu \quad (II.49)$$

Atunci

$$\begin{aligned} [D_\mu, X_A] h^B_\nu &= (D_\mu X_A)(h^B_\nu) - (X_A D_\mu) h^B_\nu = D_\mu [X_A(h^B_\nu)] - X_A [D_\mu(h^B_\nu)] = \\ &= D_\mu \left(\int_{CA}^B h^B_\nu \right) - \int_{CA}^B D_\mu(h^C_\nu) = \int_{CA}^B D_\mu h^C_\nu - \int_{CA}^B D_\mu h^C_\nu = 0 \end{aligned} \quad (II.50)$$

pentru orice h^B_ν și deci

$$[D_\mu, X_A] = 0 \quad (II.51)$$

unde am admis [4]:

$$X_A [D_\mu, h_\nu^B] = \oint_{CA}^B D_\mu (h_\nu^C) \quad (II.52)$$

O relație echivalentă cu (II.51) este următoarea:

$$\begin{aligned} [D_\mu, X_A] &= [e_\mu + ig h_\mu^B X_B, X_A] = [e_\mu, X_A] + ig [h_\mu^B X_B, X_A] = [e_\mu, X_A] - \\ &- ig [X_A, h_\mu^B X_B] = [e_\mu, X_A] - ig h_\mu^B [X_A, X_B] - ig (X_A h_\mu^B) X_B = \\ &= [e_\mu, X_A] - ig \oint_{AB}^C h_\mu^B X_C - ig \oint_{CA}^B h_\mu^C X_B = [e_\mu, X_A] - ig \oint_{AB}^C h_\mu^B X_C - \\ &- ig \oint_{BA}^C h_\mu^B X_C = [e_\mu, X_A] - ig \oint_{AB}^C h_\mu^B X_C + ig \oint_{AB}^C X_C [e_\mu, X_A] \end{aligned} \quad (II.53)$$

adică

$$[e_\mu, X_A] = 0 \quad (II.54)$$

Prin urmare acțiunea e_μ -urilor este independentă de a X_A -urilor. În această ultimă relație s-a folosit identitatea [3]:

$$[X_A, h_\mu^B X_B] = h_\mu^B [X_A, X_B] + (X_A h_\mu^B X_B) \quad (II.57)$$

Față de-o transformare locală infinitezimală de etalon, cu parametrii $\varepsilon^A = \varepsilon^A(x^\mu)$ de forma

$$X = \varepsilon^A X_A \quad (II.56)$$

orice mărime $\Phi(x_\mu)$ cu valori în algebra grupului G se transformă ca

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \delta \Phi \quad (II.57)$$

unde

$$\delta_\varepsilon \Phi = [\Phi, \varepsilon^A X_A] \quad (II.58)$$

În particular:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon D &= [D_\mu, \varepsilon^A X_A] = D_\mu (\varepsilon^A X_A) - \varepsilon^A X_A D_\mu = (D_\mu \varepsilon^A) X_A + \\ &+ \varepsilon^A D_\mu X_A - \varepsilon^A X_A D_\mu = (D_\mu \varepsilon^A) X_A + \varepsilon^A [D_\mu, X_A] \end{aligned} \quad (II.59)$$

Deoarece are loc relația (II.51), atunci expresia anterioară devine

$$\delta_\epsilon D_\mu = (D_\mu \epsilon^A) X_A \quad (II.60)$$

În mod analog câmpurile de etalon se transformă astfel:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon h_\mu^A &= D_\mu \epsilon^A = e_\mu \epsilon^A + ig h_\mu^B (X_B \epsilon^A) = e_\mu \epsilon^A + ig h_\mu^B \int_{CB}^A \epsilon^C = \\ &= e_\mu \epsilon^A + ig \int_{CB}^A h_\mu^B \epsilon^C \end{aligned} \quad (II.61)$$

unde s-a considerat că

$$X_B(\epsilon^A) = \int_{CB}^A \epsilon^C \quad (II.62)$$

Curbura R este o 2 - formă orizontală cu valori în algebra Lie a lui G , ale cărei componente sînt [3]:

$$R(D_\mu, D_\nu) = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] - \frac{1}{ig} D_{[e_\mu, e_\nu]}$$

Se obține:

$$\begin{aligned} R(D_\mu, D_\nu) &= \frac{1}{ig} (e_\mu + ig h_\mu^A X_A) (e_\nu + ig h_\nu^B X_B) - \frac{1}{ig} (e_\nu + ig h_\nu^B X_B) (e_\mu + \\ &+ ig h_\mu^A X_A) - \frac{1}{ig} D_{C_{\mu\nu}^\sigma} = \frac{1}{ig} [e_\mu, e_\nu] + e_\mu (h_\nu^B, X_B) + h_\mu^A X_A e_\nu + \\ &+ ig h_\mu^A h_\nu^B X_A X_B - \frac{1}{ig} C_{\mu\nu}^\sigma D_\sigma = \frac{1}{ig} C_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma + e_\mu h_\nu^B X_B - e_\nu h_\mu^B X_B + \\ &+ ig h_\mu^A h_\nu^B [X_A, X_B] - \frac{1}{ig} C_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma - C_{\mu\sigma}^\sigma h_\sigma^A X_A = e_\mu h_\nu^B X_B - e_\nu h_\mu^B X_B + \\ &+ ig \int_{AB}^C h_\mu^A h_\nu^B X_C - C_{\mu\nu}^\sigma h_\sigma^B X_B = \left[e_\mu h_\nu^B - e_\nu h_\mu^B + ig \int_{AC}^B h_\mu^A h_\nu^C - C_{\mu\nu}^\sigma h_\sigma^B \right] X_B \end{aligned} \quad (II.63)$$

adică

$$R(D_\mu, D_\nu) = \left[e_\mu h_\nu^B - e_\nu h_\mu^B + ig \oint_{AC}^B h_\mu^A h_\nu^C - C_{\mu\nu}^\sigma h_\sigma^B \right] \quad (II.64)$$

Termenii de tipul $h_\sigma^C X_C e_\rho$ prezenți în relația anterioară sînt nuli. Într-adevăr

$$[X_C, h_\sigma^C e_\rho] = h_\sigma^C [X_C, e_\rho] + (X_C h_\sigma^C e_\rho) = (X_C h_\sigma^C e_\rho) \quad (II.65)$$

sau încă

$$X_C h_\sigma^C e_\rho - h_\sigma^C e_\rho X_C = X_C h_\sigma^C e_\rho \quad (II.66)$$

ceea ce implică

$$h_\sigma^C e_\rho X_C = 0 \quad (II.67)$$

Cum

$$e_\rho X_C = X_C e_\rho \quad (II.68)$$

în final se obține

$$h_\sigma^C X_C e_\rho = 0 \quad (II.69)$$

Definînd apoi tensorul tensiunilor (stress tensor) $F_{\mu\nu}^A$ prin relația

$$R(D_\mu, D_\nu) = F_{\mu\nu}^B X_B \quad (II.70)$$

atunci din comparația relațiilor (II.63) și (II.70) rezultă

$$F_{\mu\nu}^B = e_\mu h_\nu^B - e_\nu h_\mu^B + ig \oint_{AC}^B h_\mu^A h_\nu^C - C_{\mu\nu}^\sigma h_\sigma^B \quad (II.71)$$

Acest tensor se transformă față de G local sub forma:

$$\delta_\varepsilon F_{\mu\nu}^A = \oint_{CB}^A F_{\mu\nu}^A \varepsilon^B = - \oint_{BC}^A \varepsilon^B F_{\mu\nu}^C \quad (II.72)$$

Pentru

$$h_\mu = h_\mu^A X_A \quad (II.73)$$

și

$$F_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}^A X_A \quad (II.74)$$

relația (II.71) se mai poate scrie astfel

$$F_{\mu\nu} = e_\mu h_\nu - e_\nu h_\mu + ig[h_\mu, h_\nu] - C_{\mu\nu}^\sigma h_\sigma \quad (II.75)$$

Acest rezultat este în acord cu cel din [5] dar diferă de cel din [6].

II.3 TEORIA RELATIVITĂȚII ÎN BAZE CARTAN

În acest scop vom urma lucrările [7], [11]. Fie M o varietate diferențiabilă și $T_p(M)$ fibra tangentă la aceasta în punctul P . Varietatea M este riemanniană dacă se poate defini o formă metrică:

$$g: (v, u) \rightarrow g(v, u) \quad (II.76)$$

simetrică, nedegenerată și pozitivă. Pentru câmpurile de vectori

$$v = v^\mu e_\mu, \quad u = u^\nu e_\nu \quad (II.77)$$

relația anterioară devine:

$$g(v, u) = g(v^\mu e_\mu, u^\nu e_\nu) = v^\mu u^\nu g(e_\mu, e_\nu) \quad (II.78)$$

sau, introducînd coeficienții metrici

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu) \quad (II.79)$$

expresia

$$g(v, u) = g_{\mu\nu} v^\mu u^\nu \quad (II.80)$$

Întrucît g este simetrică, coeficienții metrici satisfac proprietate:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (II.81)$$

Acum conexiunea liniară (II.8) pe varietatea de bază M este o conexiune metrică dacă are loc identitatea [3]:

$$\begin{aligned} v[g(u, \omega)] &= (\nabla_v g)(u, \omega) + g(\nabla_v u, \omega) + g(u, \nabla_v \omega) = \\ &= g(\nabla_v u, \omega) + g(u, \nabla_v \omega) \end{aligned} \quad (II.82)$$

Explicit, ținînd seama de relațiile (II.77), și (II.82)

$$(\nabla_v g)(u, \omega) = v^\omega u^\nu \omega^\sigma \nabla_\omega (g_{\nu\sigma})$$

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_v u, \omega) &= v^\omega g_{v\sigma} (\nabla_e u^\nu) \omega^\sigma v^\omega g_{v\sigma} (e_\omega u^\nu + \Gamma_{\lambda\omega}^\nu u^\lambda) \omega^\sigma = \\
 &= v^\omega g_{v\sigma} (e_\omega u^\nu) \omega^\sigma + v^\omega u^\nu \omega^\sigma g_{\lambda\sigma} \Gamma_{v\omega}^\lambda \\
 g(u, \nabla_v \omega) &= v^\omega g_{v\sigma} u^\nu (\nabla_e \omega^\sigma) = v^\omega g_{v\sigma} u^\nu (e_\omega \omega^\sigma + \Gamma_{\lambda\omega}^\sigma \omega^\lambda) = \\
 &= v^\omega g_{v\sigma} u^\nu (e_\omega \omega^\sigma) + \Gamma_{\sigma\omega}^\lambda v^\omega u^\nu \omega^\sigma g_{v\lambda} \\
 v[g(u, \omega)] &= v^\omega e_\omega [u^\nu \omega^\sigma g_{v\sigma}] = v^\omega (e_\omega u^\nu) \omega^\sigma g_{v\sigma} + \\
 &+ v^\omega u^\nu (e_\omega \omega^\sigma) g_{v\sigma} + v^\omega u^\nu \omega^\sigma e_\omega (g_{v\sigma})
 \end{aligned} \tag{II.83}$$

Aceasta înseamnă că:

$$\begin{aligned}
 v^\omega u^\nu \omega^\sigma [e_\omega (g_{v\sigma})] &= v^\omega u^\nu \omega^\sigma [\nabla_\omega (g_{v\sigma}) + g_{\lambda\sigma} \Gamma_{v\omega}^\lambda + g_{v\lambda} \Gamma_{\sigma\omega}^\lambda] \\
 v^\omega u^\nu \omega^\sigma \nabla_\omega (g_{v\sigma}) &= 0
 \end{aligned} \tag{II.84}$$

Concis, oricare ar fi cîmpurile de vectori $v^\omega, u^\nu, \omega^\sigma$ are loc condiția metrică obișnuită [3]:

$$\nabla_\omega g_{v\sigma} = e_\omega g_{v\sigma} - g_{\lambda\sigma} \Gamma_{v\omega}^\lambda - g_{v\lambda} \Gamma_{\sigma\omega}^\lambda = 0 \tag{II.85}$$

Unicitatea conexiunii liniare metrice anterioare se obține impunînd condiția

$$T(v, u) = T(u, v) \tag{II.86}$$

ceea ce, avînd în vedere relațiile (II.15) și (II.1) este echivalent cu următoarea condiție:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - C_{\mu\nu}^\lambda = 0 \tag{II.87}$$

Să introducem notația:

$$\Gamma_{\mu\nu\omega} = \Gamma_{\nu\omega}^\sigma g_{\mu\sigma} \tag{II.88}$$

Cu această relație, (II.85) devine:

$$e_\omega g_{v\mu} = \Gamma_{\mu\nu\omega} + \Gamma_{v\mu\omega} \tag{II.89}$$

Folosind relația (II.87) și contractînd-o cu $g_{\lambda\omega}$ se obține:

$$-C_{\omega\mu\nu} = \Gamma_{\omega\mu\nu} - \Gamma_{\omega\nu\mu} \tag{II.90}$$

unde am luat

$$C_{\omega\mu\nu} = C_{\mu\nu}^p g_{p\omega} \tag{II.91}$$

De aici și din relația (II.90), prin permutarea ciclică a indicilor, rezultă:

$$-C_{\nu\omega\mu} = \Gamma_{\nu\omega\mu} - \Gamma_{\nu\mu\omega} \quad (\text{II.92})$$

$$-C_{\mu\nu\omega} = \Gamma_{\mu\nu\omega} - \Gamma_{\mu\omega\nu} \quad (\text{II.93})$$

respectiv

$$e_{\mu}g_{\omega\nu} = \Gamma_{\nu\omega\mu} + \Gamma_{\omega\nu\mu} \quad (\text{II.94})$$

$$e_{\nu}g_{\mu\omega} = \Gamma_{\omega\mu\nu} + \Gamma_{\mu\omega\nu} \quad (\text{II.95})$$

Expresia coeficientului de conexiune în funcție de tensorul metric (II.81) și coeficienții de comutare (II.2) rezultă sumând mai întâi relațiile (II.94) și (II.95) și apoi scăpând din acest rezultat relația (II.89). Se obține

$$\begin{aligned} e_{\mu}g_{\omega\nu} + e_{\nu}g_{\mu\omega} - e_{\omega}g_{\nu\mu} &= \Gamma_{\nu\omega\mu} + \Gamma_{\omega\nu\mu} + \Gamma_{\omega\mu\nu} + \Gamma_{\mu\omega\nu} - \Gamma_{\mu\nu\omega} - \Gamma_{\nu\mu\omega} = \\ &= 2\Gamma_{\omega\nu\mu} + (\Gamma_{\nu\omega\mu} - \Gamma_{\nu\mu\omega}) + (\Gamma_{\mu\omega\nu} - \Gamma_{\mu\nu\omega}) + (\Gamma_{\omega\mu\nu} - \Gamma_{\omega\nu\mu}) \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

$$\text{sau } e_{\mu}g_{\omega\nu} + e_{\nu}g_{\mu\omega} - e_{\omega}g_{\nu\mu} = 2\Gamma_{\omega\nu\mu} - C_{\nu\omega\mu} + C_{\mu\nu\omega} - C_{\omega\mu\nu} \quad (\text{II.97})$$

În final această ultimă relație dă:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega\nu\mu} &= \frac{1}{2} [(e_{\mu}g_{\omega\nu} + e_{\nu}g_{\mu\omega}) - e_{\omega}g_{\nu\mu} + C_{\nu\omega\mu} + C_{\omega\mu\nu} - C_{\mu\nu\omega}] = \\ &= \frac{1}{2} (e_{\mu}g_{\omega\nu} + e_{\nu}g_{\mu\omega} - e_{\omega}g_{\nu\mu} + C_{\nu\omega\mu} + C_{\omega\mu\nu} - C_{\mu\nu\omega}) \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

cu

$$C_{\nu\omega\mu} = -C_{\omega\nu\mu} \quad (\text{II.99})$$

Se poate găsi expresia lui $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ contractînd relația anterioară cu $g^{\omega\lambda}$.
Rezultă:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega\nu\mu}g^{\omega\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\omega\lambda}(e_{\mu}g_{\omega\nu} + e_{\nu}g_{\mu\omega} - e_{\omega}g_{\nu\mu}) + \\ &+ \frac{1}{2}g^{\omega\lambda}(C_{\nu\omega}^{\rho}g_{\rho\mu} + C_{\mu\omega}^{\rho}g_{\rho\nu} - C_{\nu\mu}^{\rho}g_{\rho\omega}) \end{aligned} \quad (\text{II.100})$$

Obs. În cazul bazelor de coordonate (II.3) relația anterioară ia forma simplă:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\omega\lambda} \left(\frac{\partial g_{\omega\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\omega}} \right) \quad (\text{II.101})$$

Pentru a deduce ecuațiile lui Einstein vom folosi rețeta prezentată în [7], [12]. În acest scop să rescriem mai întâi identitatea lui Bianchi (II.40):

$$\nabla_{\mu} R^{\alpha}_{\omega\sigma\rho} + \nabla_{\rho} R^{\alpha}_{\omega\mu\sigma} + \nabla_{\sigma} R^{\alpha}_{\omega\rho\mu} = 0 \quad (\text{II.102})$$

În continuare contractînd după indicii α și σ relația anterioară devine:

$$\nabla_{\mu} R^{\sigma}_{\omega\sigma\rho} + \nabla_{\rho} R^{\sigma}_{\omega\mu\sigma} + \nabla_{\sigma} R^{\sigma}_{\omega\rho\mu} = 0 \quad (\text{II.103})$$

sau încă, ținînd seama de proprietate (II.27) și

$$R^{\sigma}_{\omega\rho\mu} = g^{\sigma\beta} R_{\beta\omega\rho\mu} \quad (\text{II.104})$$

$$\nabla_{\mu} R^{\sigma}_{\omega\sigma\rho} - \nabla_{\rho} R^{\sigma}_{\omega\sigma\mu} + \nabla_{\sigma} (g^{\sigma\beta} R_{\beta\omega\rho\mu}) = 0 \quad (\text{II.105})$$

Să schimbăm în această ultimă relație indicii β și ω . Rezultă:

$$\nabla_{\mu} R^{\sigma}_{\omega\sigma\rho} - \nabla_{\rho} R^{\sigma}_{\omega\sigma\mu} - \nabla_{\sigma} (g^{\sigma\beta} R_{\omega\beta\rho\mu}) = 0 \quad (\text{II.106})$$

de unde, contractînd cu $g^{\omega\rho}$, se obține:

$$g^{\omega\rho} \nabla_{\mu} R^{\sigma}_{\omega\sigma\rho} - g^{\omega\rho} \nabla_{\rho} R^{\sigma}_{\omega\sigma\mu} - g^{\omega\rho} \nabla_{\sigma} (g^{\sigma\beta} R_{\omega\beta\rho\mu}) = 0 \quad (\text{II.107})$$

Acum, ținînd seama de notațiile

$$R^{\sigma}_{\omega\sigma\rho} = R_{\omega\rho} \quad ; \quad R = g^{\omega\rho} R_{\omega\rho} \quad (\text{II.108})$$

și de proprietățile

$$g^{\omega\rho} R^{\sigma}_{\omega\sigma\mu} = g^{\omega\rho} R_{\omega\mu} = R^{\rho}_{\mu} \quad (\text{II.109})$$

$$g^{\omega\rho} g^{\sigma\beta} R_{\omega\beta\rho\mu} = g^{\sigma\beta} R^{\rho}_{\beta\rho\mu} = g^{\sigma\beta} R_{\beta\mu} = R^{\sigma}_{\mu} \quad (\text{II.110})$$

relația (II.107) dă încă

$$\nabla_{\mu} R - \nabla_{\rho} R^{\rho}_{\mu} - \nabla_{\sigma} R^{\sigma}_{\mu} = 0 \quad (\text{II.111})$$

adică

$$\nabla_{\rho} R^{\rho}_{\mu} - \nabla_{\mu} \left(\frac{1}{2} R \right) = 0 \quad (\text{II.112})$$

Dar (II.112) este complet echivalentă cu

$$\nabla_{\rho} R^{\rho}_{\mu} - \nabla_{\mu} \left(\frac{1}{2} \delta^{\rho}_{\mu} R \right) = \nabla_{\rho} \left(R^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\rho}_{\mu} R \right) = 0 \quad (\text{II.113})$$

Cum tensorul energie - impuls al materiei satisface relația [8]:

$$\nabla_{\rho} (T^{\rho}_{\mu}) = 0 \quad (\text{II.114})$$

din (II.113) și (II.114) rezultă că, pînă la un termen de cuadridivergență nulă, [8] vom avea:

$$R_{\mu}^{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\rho} R = \kappa T_{\mu}^{\rho} \quad (\text{II.115})$$

cu

$$\kappa = \text{const.} \quad (\text{II.116})$$

adică tocmai ecuațiile lui Einstein.

Însă în [9] se demonstrează riguros că orice tensor simetric de ordinul doi exprimabil numai prin derivate de ordinul doi ale tensorului metric $g_{\mu\nu}$ și care este liniar în derivatele de ordinul doi este de forma:

$$G_{\mu\rho} = \alpha R_{\mu\rho} + \beta R g_{\mu\rho} + \Lambda g_{\mu\rho} \quad (\text{II.117})$$

$$\alpha, \beta = \text{const.} \quad (\text{II.118})$$

Impunînd tensorului $G_{\mu\rho}$ condiția:

$$\nabla_{\rho} G_{\mu}^{\rho} = 0 \quad (\text{II.119})$$

se demonstrează fără dificultăți că, abstracție făcînd de un factor de proporționalitate, forma tensorului G trebuie să fie:

$$G_{\mu\rho} = R_{\mu\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\rho} R + \Lambda g_{\mu\rho} \quad (\text{II.120})$$

unde Λ se numește constanta cosmologică a lui Einstein. Cercetări recente [7] au arătat că dacă această constantă există ea are o valoare foarte mică și în plus termenul ce o conține poate fi inclus adițional în tensorul energie - impuls prin recalibrarea acestuia. Astfel forma standard a ecuațiilor Einstein este tot (II.115).

În acest fel sub aspectul consistenței geometrizării interacțiunii ecuațiile lui Einstein (II.115) sînt justificate. Încercările de-a obține ecuații pe baza unui principiu variațional de tipul staționariității acțiunii sînt și astăzi deschise din cauza nesoluționării riguroase a densității de langrangean a cîmpului gravitațional. Acest rezultat negativ are o rădăcină fizică mai veche și anume problema localizării energiei cîmpului gravitațional [7] [12].

BIBLIOGRAFIE

1. M.Agop și N.Mazilu, *Fundamente ale fizicii moderne*, Editura Junimea, Iași, 1989.
2. M.Agop, *Probleme de invarianță și haos în teoria mișcării*, Editura G.Asachi, Iași, 1992.
3. G.Gheorghiev, V.Oproiu, *Varietăți diferențiale finite și infinite dimensionale*, Editura Academiei Române, 1982, vol.I.
4. M.Chaichian, N.F.Nelipa, *Introduction to Gauge Field Theories*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokio 1984.
5. D.Sen, Nucl. Phys. B284, 201, 1987.
6. M.Carmeli, S.Malin, Found. Phys., 15, 791, 1986.
7. C.Dariescu, Aura Dariescu, *Comunicare Privată*.
8. A.Einstein, *Teoria relativității*, Editura Tehnică, București, 1957.
9. N.Ionescu, *Relativitatea generală și cosmologie*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1980.
10. Gh.Zet, *Comunicare privată*.
11. Gh.Zet, C.Pasnicu, A.Agop, Found. Phys., 21, 173, 1991.
12. C.Dariescu, *Analize Științifice ale Univ Iași* 1992, (sub tipar).



III. TEORII FIZICE ÎN TOPOLOGIA $R \times S^3$

Argument (M.Agop)

Un caz particular de bază Cartan ne este oferit de topologia $M = R \times S^3$. În algeea acestei varietăți din clasa varietăților diferențiabile de tip $M = R \times \sigma$ trebuie reținute numai argumentele de ordin fizic și nu cele matematice [21]. Și aceasta întrucât, în opinia noastră, nu geometria determină fizica unui fenomen ci, dimpotrivă, fenomenul fizic condiționează o anumită geometrie. De exemplu geometria Riemanniană, completată cu transportul paralel Levi-Civita, a fost folosită de Einstein în Teoria Relativității Generale. Însă nimic nu obligă să credem că această geometrie ar corespunde realității fizice. Într-adevăr, o analiză amănunțită a modului cum se fac măsurătorile spațiale [1] arată că coordonatele carteziene nu sînt mărimi direct măsurabile ci numai auxiliare de calcul.

Este de ajuns să ne gîndim, de exemplu, la modul de stabilire a poziției unei stele, ca Proxima Centauri de pildă, pentru a ajunge la concluzia că ceea ce se măsoară sînt unghiuri și distanțe deși nici acestea din urmă nu se pot da nemijlocit [1]. În această privință starea de fapt este și mai drastică pentru sistemele microscopice, încît dacă se admite că relațiile de incertitudine se referă la măsurători [1], ele nu au ca obiect coordonatele carteziene și impulsurile conjugate ci numai coordonatele unghiulare. Într-un asemenea context relațiile de nedeterminare trebuie însă redefinite cu precauții suplimentare [2]. Prin urmare, singura noțiune ce poate eventual transcede scara de considerare a universului ar fi cea de direcție [1].

Orice direcție se poate da goniometric, prin setul de coordonate unghiulare (θ, α, β) implicînd numai rotații. Un exemplu tipic ne poate fi oferit de unghiurile Euler [3]. Acum cu aceste variabile se poate genera varietatea diferențiabilă S^3 .

În ceea ce privește distanța, măsurarea ei comportă totdeauna, excluzînd cazurile rare cînd măsurătorile de lungime se fac cu rigle rigide sau lungimi standard, un ceasornic necesar de-a marca intervalul de timp dus -întors pentru perturbația ce se propagă în spațiu [1]. Este deci necesar de-a introduce o nouă varietate diferențiabilă unidimensionabilă R generată de variabila timp.

Aici cele două noțiuni fundamentale de direcție și distanță apar independente. Condiționarea lor reciprocă se poate însă realiza pe două căi distincte:

a) fie construirea unei varietăți unice, cvadridimensionale în care coordonata temporală se bucură de aceleași proprietăți ca și coordonatele spațiale. Este cazul Teoriei Generale a Relativității [4] ca și al altor teorii fizice dezvoltate pe asemenea varietăți [5].

b) fie construirea unei varietăți de tip $M = R \times S^3$ în care coordonatei temporale să-i revină proprietăți cu totul specifice față de coordonatele spațiale. Această ultimă varietate se dovedește esențială nu numai în înțelegerea directă a realității fizice ci și la cuantificarea cîmpului gravitațional [6]. Aceasta înseamnă că nu numai măsurătorile de distanță ci și problemele de cuantificare cer utilizarea varietății $M = R \times S^3$.

III.1 GEOMETRIA VARIETĂȚII $R \times S^3$ (Gh.Zet)

Sfera S^3 poate fi parametrizată [7] fie cu ajutorul coordonatelor carteziane x_m ($m = 1, 2, 3, 4$), fie cu variabilele complexe (u, v), fie cu unghiurile (θ, α, β). Dacă raza lui S^3 este egală cu ρ , atunci

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \rho^2 \quad (\text{III.1})$$

În continuare vom lua $\rho = 1$ ori de cîte ori acesta nu va fi de importanță pentru aspectele discutate. Inver sul acestei raze, poate fi considerată ca o scală de masă în spațiul $R \times S^3$. Legătura între diferitele variabile este dată de relațiile:

$$\begin{aligned} u &= x_1 + ix_2 = \cos\theta e^{i\alpha} \\ v &= x_3 + ix_4 = \sin\theta e^{i\beta} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

unde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$. Elementul de volum este:

$$d\Omega = \frac{1}{(2\pi^2)} \sin\theta \cos\theta d\theta d\alpha d\beta \quad (\text{III.3})$$

Varietatea S^3 are simetria $O(4)$ a cărei algebră este $SU(2) \times SU(2)$. Sfera S^3 însăși coincide cu varietatea grupului $SU(2)$, iar cele două subgrupuri corespund acțiunilor la stînga și respectiv la dreapta pe varietatea S^3 . Ca urmare, există două repere posibile $\vec{e}_i^{(1)}$ și $\vec{e}_i^{(2)}$ ($i = (1, 2, 3)$) pe S^3 , ambele putînd fi folosite pentru a defini derivate spațiale pe această varietate. Alegerea unuia sau altuia din aceste repere nu conduce la rezultate fizice diferite.

Vom conveni să folosim reperul $\vec{e}_i^{(1)}$, iar derivatele corespunzătoare le vom nota prin $\hat{\partial}_i$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_1 = i \left(u \frac{\partial}{\partial v^*} - v \frac{\partial}{\partial u^*} + v^* \frac{\partial}{\partial u} - u^* \frac{\partial}{\partial v} \right) &= \sin(\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &+ \cos(\alpha + \beta) \left[\operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \\ \hat{\partial}_2 = u \frac{\partial}{\partial v^*} - v \frac{\partial}{\partial u^*} - v^* \frac{\partial}{\partial u} + u^* \frac{\partial}{\partial v} &= \cos(\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\sin(\alpha + \beta) \left[\operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

$$\hat{\partial}_3 = i \left(v^* \frac{\partial}{\partial v^*} - u \frac{\partial}{\partial u} + v^* \frac{\partial}{\partial v^*} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Aceste derivate nu comută între ele, satisfăcînd relațiile

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \hat{\partial}_k \quad (\text{III.5})$$

unde ε_{ijk} este tensorul antisimetric de rang 3 cu $\varepsilon_{123} = 1$. Apoi, dacă introducem derivatele $\hat{\partial}_\mu = \left(\hat{\partial}_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \hat{\partial}_i \right)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ atunci

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 2\varepsilon_{0\mu\nu\gamma} \hat{\partial}_\gamma \quad (\text{III.6})$$

unde $\varepsilon_{\mu\nu\gamma}$ este tensorul antisimetric de rang 4 cu $\varepsilon_{0123} = 1$. Vom nota $C_{\mu\nu}^{\gamma} = 2\varepsilon_{0\mu\nu\gamma}$ și atunci

$$[\hat{\partial}_{\mu}, \hat{\partial}_{\nu}] = C_{\mu\nu}^{\gamma} \hat{\partial}_{\gamma} \quad (\text{III.7})$$

Mărimile $C_{\mu\nu}^{\gamma}$ reprezintă constantele de structură ale algebrei Lie a grupului $T \times SU(2)$, unde T este grupul translațiilor în timp.

Grupul de simetrie Poincaré al spațiului timp $R \times S^3$ are șapte generatori: hamiltonianul H care generează translațiile în timp, generatorii L^i ($i = 1, 2, 3$) ai unuia din subgrupurile $SU(2)$ și generatorii M^i ($i = 1, 2, 3$) ai celui de-al doilea subgrup $SU(2)$. Ecuațiile de structură ale celor două subgrupuri sînt

$$[L^i, L^j] = -2ia\varepsilon^{ijk}L^k$$

$$[M^i, M^j] = 2ia\varepsilon^{ijk}M^k$$

$$[L^i, M^j] = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$[L^i, M^j] = [H, L^i] = [H, M^i] = 0$$

unde $a = \rho^{-1}$ este inversul razei sferei S^3 . Notăm că L^i și M^i au dimensiunea unei mase.

Vom defini acum noii generatori

$$P^i = \frac{1}{2}(L^i - M^i), \quad J^i = -\frac{1}{2a}(L^i + M^i) \quad (\text{III.9})$$

Ecuațiile de structură corespunzătoare au forma

$$[P^i, P^j] = ia^2\varepsilon^{ijk}J^k \quad (\text{III.10})$$

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k$$

$$[P^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}P^k$$

$$[H, P^i] = 0, \quad [H, J^i] = 0, \quad [H, H] = 0$$

Generatorii J^i ($i = 1, 2, 3$) generează rotațiile în jurul axei x_i , P^i generează translațiile de-a lungul axei x_i , iar H generează translațiile în timp. În limita $\rho \rightarrow \infty$ (sau echivalent $a \rightarrow 0$) aceste ecuații trec în cele care descriu rotațiile și translațiile în spațiul Minkowski. Trebuie subliniat că prin

această limită nu se obțin și generatorii „rotațiilor” spațio-temporale (Lorentz boosts).

Deci simetriile de acest tip (boost symmetries) ale spațiului Minkowski sînt absente în spațiul $R \times S^3$.

Pentru a scrie diferite ecuații în spațiul $R \times S^3$, trebuie să construim un cîmp tetradic. Această constă dintr-un reper de 4 vectori ortonormați în fiecare punct al spațiului-timp. Deoarece S^3 este paralelizabilă [8] putem alege triada:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(1)} &= (x_4, x_3, -x_2, -x_1) \\ \vec{e}_2^{(1)} &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2) \\ \vec{e}_3^{(1)} &= (x_2, -x_1, x_4, -x_3)\end{aligned}\tag{III.11}$$

Aici (a, b, c, d) notează componentele carteziene ale vectorului considerat.

Componentele unui vector vor fi $V_i^{(1)} = \vec{V} \cdot \vec{e}_i^{(1)}$. Corespunzător, divergența lui V și rotorul său au expresiile:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \hat{\partial}_i V_i^{(1)}\tag{III.12}$$

$$(\nabla \times \vec{V})_i^{(1)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\hat{\partial}_j V_k^{(1)} - \hat{\partial}_k V_j^{(1)}) - 2V_i^{(1)}\tag{III.13}$$

Termenul $-2V_i^{(1)}$ rezultă datorită ecuațiilor de comutare (II.5) adică datorită necomutativității derivatelor $\hat{\partial}_i$. Menționăm că se poate defini și cel de-al doilea reper $\vec{e}_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3$), luînd

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(2)} &= (x_4, -x_3, x_2, -x_1) \\ \vec{e}_2^{(2)} &= (x_3, x_4, -x_1, -x_2) \\ \vec{e}_3^{(2)} &= (-x_2, x_1, x_4, -x_3)\end{aligned}\tag{III.14}$$

În acest caz componentele lui $\vec{V}$ vor fi $V_i^{(2)}$, iar în formula (III.13) ultimul termen apare cu semn schimbat ($+2V_i^{(2)}$). Aceasta deoarece ecuațiile de comutare (III.5) devin în acest reper $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = -2\varepsilon_{ijk} \hat{\partial}_k$.

III.2 TEORII GAUGE PE VARIETATEA $R \times S^3$ (Gh.Zet)

În acest scop vom folosi rezultatele date în [7]. Câmpul de etalon $A_\mu(x^\nu)$ se asociază câmpului electromagnetic și descrie interacțiunile electromagnetice dintre câmpurile ale căror cuante sînt particule încărcate electric. Putem defini componentele câmpurilor magnetice și ale câmpului electric cu ajutorul tensorului câmpului electromagnetic $F_{\mu\nu}$, prin relațiile:

$$H_i = F_{i0} = F^{0i} = \hat{\partial}_i A_0 - \hat{\partial}_0 A_i \quad (\text{III.15})$$

și

$$E_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij} = \varepsilon_{ijk} \hat{\partial}_j A_k - 2A_i \quad (\text{III.16})$$

În aceste relații, A_0 este potențialul scalar al câmpului electromagnetic, fiind în general o funcție de variabilele $(t, \theta, \alpha, \beta)$. Rezultatul (III.16) diferă de cel dat în [8-10] prin termenul $2A_i$.

Lagrangeanul câmpului electromagnetic A_μ este:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{III.17})$$

Ecuatiile electrodinamicii pe spațiu-timp $R \times S^3$ se pot scrie considerînd reperul $\vec{e}_i^{(1)}$ definit în paragraful 1. În acest caz ecuațiile (III.15) și (III.16) devin:

$$H_i = \hat{\partial}_i A_0 - \hat{\partial}_0 A_i \quad (\text{III.18})$$

și respectiv

$$\vec{E}_i = (\nabla \times \vec{A})_i \quad (\text{III.19})$$

Un al doilea exemplu ne este oferit de grupul $SU(2)$. Acest grup are trei generatori $X_A = X_i$ ($i = A = 1, 2, 3$) care sînt tocmai componentele izospinului folosite în teoria particulelor elementare. Câmpurile de etalon sînt acum în număr de trei: $h_\mu^i = f_\mu^i(t, \theta, \alpha, \beta)$ $i = 1, 2, 3$, și $\mu = 0, 1, 2, 3$. În modelul standard pentru interacțiunile electrolabe (Weinberg-Salam)

aceste câmpuri sînt asociate cu bozonii vectoriali intermediare W^+ , W^- și Z^0 și ele mediază interacțiunile slabe dintre câmpurile fizice.

Componentele 2-formei de curbura asociată acestor câmpuri date în capitolul II devin:

$$R_{\mu\nu}^i = \partial_\mu h_\nu^i - \partial_\nu h_\mu^i + igf_{jk}^i h_\nu^j h_\mu^k - C_{\mu\nu}^\gamma h_\gamma^i \quad (\text{III.20})$$

unde f_{jk}^i sînt constantele de structură ale grupului $SU(2)$, iar $C_{\mu\nu}^\gamma = 2\varepsilon_{0\mu\nu\gamma}$. Definind matricile:

$$B_\mu = h_\mu^i X_i, \quad F_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^i X_i \quad (\text{III.21})$$

putem scrie relația (III.20) sub forma:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu] - C_{\mu\nu}^\gamma B_\gamma \quad (\text{III.22})$$

Câmpurile gauge $h_\mu^i(x^\nu)$ se transformă față de grupul gauge $SU(2)$ după legea:

$$\delta_\varepsilon h_\mu^i = \partial_\mu \varepsilon^i + igf_{jk}^i h_\mu^j \varepsilon^k \quad (\text{III.23})$$

Se observă, că ultimul termen din [2.8] nu apare în [9] și că acest termen este determinat de necomutativitatea derivatelor $\hat{\partial}_\mu$ folosite de noi în spațiul $R \times S^3$.

Lagrangeanul câmpurilor gauge și a unui câmp Ψ de spin 1/2 este dat de expresia [9]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} T_r(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - \bar{\Psi} \gamma (\hat{\partial}_\mu - ieB_\mu) \Psi - I \bar{\Psi} \Psi \quad (\text{III.24})$$

unde I este momentul de inerție al particulei asociate câmpului Ψ iar γ_μ sînt matricile lui Dirac. Curenții câmpurilor și ecuațiile de câmp se obțin în mod obișnuit dar pentru aceasta trebuie să se țină seama de observațiile menționate anterior.

III.3 GRAVITAȚIA PE VARIETATEA $R \times S^3$ (Gh.Zet)

O primă tentativă de-a construi teoria gravitației pe varietatea $M = R \times S^3$ a fost dată de Carmeli și Malin în [10]. Surprinzător este faptul că în acest model coeficienții metrici pot juca rolul momentelor de inerție ai solidului rigid. Ulterior în [11] s-a reformulat gravitația pe varietatea tangentă $T_p(M \equiv R \times S^3)$. În cele ce urmează vom prezenta principalele rezultate ale acestei teorii.

Fie deci varietatea diferențială $M \equiv R \times S^3$. Acum toate proprietățile stabilite în capitolul II se pot particulariza și la această varietate. Astfel, o conexiune liniară pe varietatea $M \equiv R \times S^3$ este o conexiune metrică dacă are loc relația:

$$\nabla_\omega g_{\nu\sigma} = \hat{\partial}_\omega g_{\nu\sigma} - g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\nu\omega}^\lambda - g_{\nu\lambda} \Gamma_{\sigma\omega}^\lambda \quad (\text{III.25})$$

Ea devine și unică în condițiile în care tensorul de torsiune:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - 2\varepsilon_{0\mu\nu}^\lambda \quad (\text{III.26})$$

are toate componentele nule. În continuare pentru conexiune și tensorul de curbura $R_{\omega\sigma\rho}^\alpha$ se obțin expresiile:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\omega\lambda} (\hat{\partial}_\mu g_{\nu\omega} + \hat{\partial}_\nu g_{\mu\omega} - \hat{\partial}_\omega g_{\nu\mu}) + \quad (\text{III.27})$$

$$+ g^{\omega\lambda} (\varepsilon_{0\rho\nu\omega} g_{\rho\mu} + \varepsilon_{0\rho\mu\omega} g_{\rho\nu} - \varepsilon_{0\nu\mu\rho} g_{\rho\omega})$$

respectiv

$$R_{\omega\sigma\rho}^\alpha = \hat{\partial}_\sigma \Gamma_{\omega\rho}^\alpha - \hat{\partial}_\rho \Gamma_{\omega\sigma}^\alpha + \Gamma_{\omega\rho}^\beta \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha - \Gamma_{\omega\sigma}^\beta \Gamma_{\beta\rho}^\alpha - 2\varepsilon_{0\gamma\sigma\rho} \Gamma_{\omega\gamma}^\alpha \quad (\text{III.28})$$

În final, ecuațiile câmpului gravitațional se reobțin după procedura standard dată în capitolul II în care:

$$R_{\omega\rho} = R_{\omega\alpha\rho}^\alpha = \hat{\partial}_\alpha \Gamma_{\omega\rho}^\alpha - \hat{\partial}_\rho \Gamma_{\omega\alpha}^\alpha + \Gamma_{\omega\rho}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\omega\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\rho}^\alpha - 2\varepsilon_{0\gamma\alpha\rho} \Gamma_{\omega\gamma}^\alpha \quad (\text{III.29})$$

și

$$R = g^{\omega\rho} R_{\omega\alpha\rho}^{\alpha} = g^{\omega\rho} \left[\partial_{\alpha} \Gamma_{\omega\rho}^{\alpha} - \partial_{\rho} \Gamma_{\omega\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\omega\rho}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\omega\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} - 2 \varepsilon_{0\gamma\alpha\rho} \Gamma_{\omega\gamma}^{\alpha} \right] \quad (\text{III.30})$$

Prezenta teorie diferă de gravitația einsteiniană obișnuită (III.30) prin termenul $\varepsilon_{0\gamma\alpha\rho} \Gamma_{\omega\gamma}^{\alpha}$. Acest lucru este implicat de necomutativitatea bazei cartaniene alese. Ar fi interesant de dezvoltat o teorie gauge a gravitației pe spațiul $R \times S^3$. În acest caz este necesar, mai întâi, să se definească grupul Poincaré $\mathcal{P}$ pe $R \times S^3$ lucrul făcut în paragraful 1. Trebuie apoi să se construiască fibratul principal P ($\mathcal{P}, R \times S^3$) avînd ca grup structurat grupul Poincaré $\mathcal{P}$ și ca varietate bază spațiul $R \times S^3$. Derivatele covariante D în acest fibrat vor conține câmpurile gauge $A_{\mu}^a \equiv A_{\mu}^a(x^{\nu})$ ($a = 1, 2, \dots, 7$) asociate cu generatorii X_a ai algebrei Lie a lui $\mathcal{P}$. Aceste câmpuri vor determina o conexiune în fibratul principal P , iar componentele $F_{\mu\nu}^a$ ale 2-formei de curbură orizontală vor determina tensorul de curbură al varietății $R \times S^3$ care descrie câmpul gravitațional.

III.4 SOLUȚII EXACTE ALE ECUAȚIILOR EINSTEIN PE VARIETATEA $R \times S^3$

(C.Dariescu, A.Dariescu)

Schimbarea de coordonate:

$$X^e (e = 1, 2, 3) \rightarrow (\chi, \theta, \varphi) \quad (\text{III.31})$$

se obține cu ajutorul relațiilor de transformare:

$$\begin{aligned}
X^1 &= \rho \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\
X^2 &= \rho \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\
X^3 &= \rho \sin \chi \cos \theta \\
X^4 &= \rho \cos \chi
\end{aligned}
\tag{III.32}$$

unde ρ definește raza pe sfera S^3 . În noile coordonate metrica spațiului sferic are expresia:

$$d\sigma^2 = \rho^2 [dx^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \tag{III.33}$$

iar cea pseudorimanniană:

$$ds^2 = \rho^2 [dx^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] - c^2 dt^2 \tag{III.34}$$

Pentru metrica (III.34) se disting două cazuri:

a) metrică dinamică în care ρ este o funcțională de epocă, adică

$$\rho = f(t) \tag{III.35}$$

situație ce implică

$$ds^2 = f^2(t) [dx^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] - c^2 dt^2$$

b) metrică statică cu

$$f(t) = \rho = \text{const.} \tag{III.36}$$

În continuare vom prezenta rezultatele obținute în referințele [12, 19]. În acest scop este convenabil de folosit o bază duală ortonormată rigidă $\{\omega^\mu\}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), de tip Cartan, așa încît

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu \tag{III.37}$$

cu

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1) \tag{III.38}$$

Explicit, vom avea

$$\omega^1 = f d\chi$$

$$\omega^2 = f \sin \chi d\theta \tag{III.39}$$

$$\omega^3 = f \sin \chi \sin \theta d\varphi$$

$$\omega^4 = c dt$$

Corespunzător, vectorii bazei $\{e_v\}$ ($v = 1, 2, 3, 4$) sînt:

$$e_1 = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \chi}$$

$$e_2 = \frac{1}{f \sin \chi} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{III.40})$$

$$e_3 = \frac{1}{f \sin \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$e_4 = \frac{\partial}{c \partial t}$$

Utilizînd acum ecuațiile de structură Cartan în care am luat

$$g^{\mu\nu} = \eta^{-\mu\nu} \quad (\text{III.41})$$

atunci, ținînd seama de [12], [19] vom avea

$$\Gamma_{1[\mu\nu]} \omega^\mu \wedge \omega^\nu = -\frac{f'}{f} \omega^1 \wedge \omega^4$$

$$\Gamma_{2[\mu\nu]} \omega^\mu \wedge \omega^\nu = \frac{\cot \chi}{f} \omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{f'}{f} \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$\Gamma_{3[\mu\nu]} \omega^\mu \wedge \omega^\nu = \frac{\cot \chi}{f} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{\cot \theta}{f \sin \chi} \omega^2 \wedge \omega^3 - \frac{f'}{f} \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$\Gamma_{4[\mu\nu]} \omega^\mu \wedge \omega^\nu = 0 \quad (\text{III.42})$$

cu $\mu < \nu$ și

$$\Gamma_{\sigma[\mu\nu]} = \Gamma_{\sigma\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\nu\mu} \quad (\text{III.43})$$

În relațiile anterioare prin f' am înțeles derivata funcției f în raport cu epoca t .

Făcînd identificările după baza de 2-forma $\omega^\mu \wedge \omega^\nu$ se obțin următorii coeficienți de conexiune nenuli

$$\Gamma_{141} = -\Gamma_{411} = \frac{f'}{f} \quad \Gamma_{212} = -\Gamma_{122} = \frac{\cot \chi}{f}$$

$$\Gamma_{242} = -\Gamma_{422} = \frac{f'}{f} \quad \Gamma_{313} = -\Gamma_{133} = \frac{\cot \chi}{f} \quad (\text{III.44})$$

$$\Gamma_{343} = -\Gamma_{433} = \frac{\cot \theta}{f \sin \chi} \quad \Gamma_{343} = -\Gamma_{433} = \frac{f'}{f}$$

Atunci 1 - formele conexiunii $\Gamma_{\mu\nu}$ din [12], [19] au expresiile:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= -\frac{\cot \chi}{f} \omega^2 & \Gamma_{13} &= -\frac{\cot \chi}{f} \omega^3 \\ \Gamma_{14} &= \frac{f'}{f} \omega_1 & \Gamma_{23} &= -\frac{\cot \theta}{f \sin \theta} \omega^3 \\ \Gamma_{24} &= \frac{f'}{f} \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Introducînd acum (III.45) în ecuațiile de structură Cartan se obține

$$R_{ik\sigma\omega} \omega^\sigma \wedge \omega^\omega = \frac{1}{f^2} [1 - (f')^2] \omega^i \wedge \omega^k$$

$$i, k = 1, 2, 3 \quad i < k \quad \sigma < \omega \quad (\text{III.46})$$

$$R_{i\rho\sigma\omega} \omega^\sigma \wedge \omega^\omega = -\frac{f''}{f} \omega^i \wedge \omega^\varphi$$

Ecuațiile (III.46) arată că componentele nenule ale tensorului de curbura Riemann sînt

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{f^2} [1 - (f')^2] \quad (\text{III.47})$$

$$R_{1414} = R_{2424} = R_{3434} = -\frac{f''}{f}$$

Tensorul Ricci, $R_{\mu\nu}$, va avea următoarele componente nenule

$$R_{44} = -\frac{3f''}{f} \quad (\text{III.48})$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = \eta^{\sigma\omega} R_{\sigma\mu\omega\nu} \quad (\text{III.49})$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{f''}{f} + \frac{2}{f} [1 + (f')^2]$$

În final scalarul Ricci R are expresia

$$R = 6 \left[\frac{f''}{f} + \frac{1}{f^2} (1 + (f')^2) \right] \quad (\text{III.50})$$

Se poate vedea că pentru $f(t) = \rho = 1$

$$R = 6 \quad (\text{III.51})$$

rezultat binecunoscut în geometria diferențială.

Să calculăm componentele $G_{\mu\nu}$ ale tensorului Einstein prin expresiile

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} R \quad (\text{III.52})$$

Se obține

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = - \left[\frac{2f''}{f} + \frac{1}{f^2} (1 + (f')^2) \right] \quad (\text{III.53})$$

$$G_{44} = \frac{3}{f^2} [1 + (f')^2]$$

Cîmpul gravitațional va fi dat de ecuațiile

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu} \quad (\text{III.54})$$

unde $T_{\mu\nu}$ este tensorul energie - impuls al materiei.

Se obțin următoarele expresii pentru componentele lui $T_{\mu\nu}$

$$T_{ik} = -\frac{1}{k} \delta_{ik} \left[\frac{2}{f} f'' + \frac{1}{f^2} (1 + (f')^2) \right]$$

$$T_{44} = \frac{3}{f^2} [1 + (f')^2]$$
(III.55)

În cazul în care $f(t) = \rho = \text{const.}$ metrica spațiu - timp a varietății $M = R \times S^3$ va fi statică. Atunci, din ecuațiile (III.55) se obține

$$T_{ik} = -\frac{1}{\rho^2} \delta_{ik}$$
(III.56)

și

$$T_{44} = \frac{3}{\rho^2}$$

Prima ecuație (III.56) indică, evident, existența unei presiuni negative. Pe de altă parte din a doua ecuație (III.56) rezultă că densitatea de energie este o mărime pozitivă. Cum se pot împăca însă aceste probleme? Pentru rezolvarea unei asemenea situații este necesar să introducem constanta cosmologică Λ . Constanta Λ poate fi acum interpretată ca o presiune universală ce are același rol cu cel din modelul de univers cu fluid omogen și izotrop. Tensorul impuls - energie pentru un asemenea fluid este dat de expresia

$$T_{\mu\nu} = (\omega + p) u_\mu u_\nu + \left(p - \frac{\Lambda}{k} \right) g_{\mu\nu}$$
(III.57)

Dacă presupunem că fluidul este static

$$u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$
(III.58)

asa încât din (III.56) se obțin următoarele expresii pentru presiuneap respectiv densitatea de energie ω .

$$p = \frac{1}{k} \left[\Lambda - \frac{1}{\rho^2} \right] \quad (\text{III.59})$$

$$\omega = \frac{1}{k} \left[\frac{3}{\rho^2} - \Lambda \right]$$

Se obțin valori pozitive pentru p și ω dacă se impune următoarea constrângere asupra razei de curbură a varietății S^3

$$\frac{1}{\Lambda} \leq \rho^2 \leq \frac{1}{3\Lambda} \quad (\text{III.60})$$

În acest caz se poate obține o soluție exactă a ecuațiilor de câmp ale lui Einstein dacă se consideră tensorul energie - impuls $T_{\mu\nu}$ ca un câmp electromagnetic pur de radiație. Acest lucru este important pentru cuantificarea câmpului electromagnetic și gravitațional pe topologia $M = R \times S^3$

Dacă se compară a doua relație (III.56) referitoare la componenta T_{44} cu cunoscuta formulă a densității de energie

$$\omega = 3p \quad (\text{III.61})$$

atunci pentru tensorul energie - impuls $T_{\mu\nu}$ se poate scrie următoarea formă

$$T_{\mu\nu} = \frac{\omega}{3} \left[3 \delta_{\mu}^4 \delta_{\nu}^4 + \eta_{\mu\nu} \right] \quad (\text{III.62})$$

Introducând (III.62) în (III.56) se obține

$$\frac{2}{f} f'' + \frac{1}{f^2} [1 + (f')^2] = -\frac{k}{3} \omega \quad (\text{III.63})$$

$$\frac{1}{f^2} [1 + (f')^2] = \frac{k}{3} \omega$$

Din aceste ultime două ecuații rezultă

$$ff'' + (f')^2 + 1 = 0 \quad (\text{III.64})$$

Soluția ecuației este de forma

$$f(t) = [a^2 - (b \pm t)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.65})$$

unde a, b sînt două constante reale de integrare. Densitatea de energie ω a cîmpului electromagnetic pur de radiație se obține introducînd (III.65) în (III.63).

Rezultă

$$\omega = \frac{\frac{3a}{k}}{[a^2 - (b \pm t)^2]} \quad (\text{III.66})$$

Este important de observat faptul că dinamizarea metricii prin funcția $f(t)$ face inadecvată introducerea constantei cosmologice Λ în model, acesta corespunzînd doar radiației pure.

III.5 MODEL UNIFICAT PENTRU TEORIA GRAVITAȚIEI ȘI TEORIILE GAUGE PE VARIETATEA $R \times S^3$ (Gh.Zet, C.Dariescu)

În această secțiune descriem un model care descrie simultan cîmpul gravitațional și cîmpurile gauge asociate unui grup Lie G [20] de simetrie internă, avînd dimensiunea arbitrară n . Ideea este aceea de a introduce un spațiu Riemann de dimensiune $4+n$, în care patru din coordonate corespund spațiului și timpului iar restul corespund la grade de libertate interne. Mai exact, acest spațiu Riemann este un fibrat principal P avînd pe $M = R \times S^3$ ca varietate bază și pe G drept grup structural. Modelul unificat constă în identificarea a $4n$ componente ale tensorului metric din P cu potențialele Yang-Mills introduse de gradul de simetrie internă. Aceste potențiale determină tensorul $F_{\mu\nu}^a$ al cîmpurilor gauge.

Lagrangeanul modelului este considerat ca fiind determinat de curbura scalară a fibratului principal. Vom arăta că acest Lagrangean este egal cu suma dintre curbura R_M a spațiului 4-dimensional $M = R \times S^3$, Lagrangeanul Yang-Mills- $\frac{1}{4}F^2$ și un termen R_G care este dat de curbura varietății grupului G și care va juca rolul unei constante cosmologice pentru model.

Fie deci $M = R \times S^3$ varietatea spațiu-timp și G un grup Lie de simetrie internă pentru un Lagrangean asociat unui sistem de cîmpuri definite pe M . Construim un fibrat principal (M, π, G) avînd pe M ca varietate bază și pe G

drept grup structural [13-15]. Aplicația $\pi : P \rightarrow M$ este proiecția lui P pe M . Orice element G induce o aplicație continuă R_g a lui P în el însuși,

$$R_g : (p, g') \in P \times G \rightarrow (p, g')g \in P \quad (\text{III.67})$$

unde $(pg)g = p(g'g)$ pentru orice $g, g' \in G, p \in P$ și este îndeplinită condiția că din $pg = p$ rezultă că g este elementul unitate ($g = e$) a grupului G . Aceasta înseamnă că G acționează ca un grup de transformări continue pe P fără puncte fixate. Varietatea coincide atunci cu spațiul lui P prin relația de echivalență determinată de translațiile la dreapta R_g . În plus, varietatea P este local-trivială peste M , adică pentru orice $x \in M = R \times S^3$ există o vecinătate U și un difomorfism Φ care duce punctele $p \in \pi^{-1}(U)$ în punctele $\pi(p), \Phi(p) \in U \times G$, astfel încît:

$$\Phi(pg) = \Phi(p)g \quad (\text{III.68})$$

pentru orice $g \in G$. Submulțimea $\pi^{-1}(x)$ a lui P se numește fibratul P în punctul x și este izomorfă cu G pentru orice $x \in M = R \times S^3$.

Vom folosi ca bază a spațiului tangent la M într-un punct, derivatele $X_\mu = \hat{\partial}_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) definită în paragraful 1 și satisfăcînd relațiile de comutare:

$$[X_\mu, X_\nu] = C_{\mu\nu}^\gamma X_\gamma \quad \mu, \nu, \gamma = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{III.69})$$

Drept bază în spațiul tangent la G într-un punct g alegem mulțimea compusă din n cîmpuri de vectori liniar independenți, sîng invarianți $\{X_a\}$, ($a = 3 + 1, \dots, 3 + n$) adică avînd proprietatea:

$$L_g * X_a = X_a \quad \forall g \in G \quad (\text{III.70})$$

unde L_g este aplicația duală a translației la stînga $L_g \rightarrow gg' \in G$ (deci a translației la stînga L_g pe G).

Cîmpurile de vectori $\{X_a\}$ pot fi considerate ca o bază a algebrei Lie G a grupului G , care generează un spațiu vectorial de dimensiune n . Ecuațiile de structură ale acestei algebre Lie se scrie sub forma:

$$[X_a, X_b] = f_{ab}^c X_c \quad (\text{III.71})$$

unde f_{ab}^c sînt constantele de structură ale grupului G , avînd proprietatea $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$.

Fiecare cîmp de vectori X_a generează un grup uniparametric de transformări $\varphi_a(t)$ pe G [13-15] cu proprietatea:

$$\varphi_a(t)g = \varphi_a(t)L_g e = L_g \varphi_a(t)e = g(\varphi_a(t)e) = R_{\varphi_a(t)}g \quad (\text{III.72})$$

pentru orice $g \in G$. Egalitatea a două din (III.72) rezultă invariant la stînga a cîmpurilor de vectori X_a .

Raza X_a ($a = 3 + 1, \dots, 3 + n$) a lui G poate fi aplicată într-un mod natural în spațiul fibrat P , deoarece $R_{\varphi_a(t)}e$ poate fi privită asemenea ca un grup uniparametric de transformări acționînd pe fibratul P . Cîmpurile de vectori din fibratul P induse de $R_{\varphi_a(t)}e$, ($a = 3 + 1, \dots, 3 + n$) le vom numi cîmpuri de vectori *fundamentali* [13-15]. Aceste cîmpuri fundamentale sînt, evident, tangente la spațiul fibrat P și formează un subspațiu V_p , numit subspațiu vertical al spațiului tangent $T_p(P)$ pentru orice p . Introducem acum o conexiune Γ în fibratul P considerat mai sus. Prin definiție [13-15] o conexiune Γ înseamnă alegerea unui subspațiu H_p al spațiului tangent $T_p(P)$, pentru orice $p \in P$, care are proprietățile: (i) spațiul tangent $T_p(P)$ este suma directă dintre subspațiul vertical V_p și subspațiul orizontal H_p :

$$\Gamma_p(P) = V_p \oplus H_p \quad \forall p \in P \quad (\text{III.73})$$

(ii) pentru orice $g \in G$ și $p \in P$ avem

$$H_{pg} = R_g H_p \quad (\text{III.74})$$

(iii) Subspațiul H_p este continuu peste tot în P . Subspațiul H_p astfel definit se numește subspațiul orizontal al lui P în punctul p . Condiția arată că oricare două spații orizontale în două puncte diferite din aceeași fibră vor diferi între ele numai printr-o transformare gauge. Se știe că o astfel de conexiune există numai pe un spațiu fibrat principal [13-15].

Pentru orice vector $X \in T_x M$ se poate defini *liftul său orizontal* în punctul $p \in \pi^{-1}(x) \subset P$ după cum urmează. Considerăm în fiecare punct p din fibra $\pi^{-1}(x)$ un vector $\hat{X} \in H_p$ astfel încît $\pi_x(\hat{x}) = X$. Vectorul $\hat{X}$ astfel

definit este unic și se numește liftul orizontal al lui X în $p \in P$. Notăm că $\hat{X}$ este un vector invariant. Într-adevăr, dacă $\hat{X}(p)$ este liftul orizontal al lui X în punctul P , atunci $R_g \hat{X}(p)$ este liftul orizontal al lui X în punctul pg . Vectorul $R_g \hat{X}(p)$ este orizontal și avem:

$$\pi(R_g \hat{X}(p)) = \pi(\hat{X}(p)) = X \quad (\text{III.75})$$

Rezultă atunci că

$$R_g \hat{X}(p) = \hat{X}(pg) \quad (\text{III.76})$$

adică $\hat{X}$ este invariant față de R_g .

În particular, baza $X_\mu = \hat{\partial}_\mu$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) aleasă anterior în spațiul tangent la $M = R \times S^3$ poate fi „liftată” orizontal în fibratul P . Fie atunci $\hat{X}_\mu$ liftul orizontal al lui X_μ . Atunci, mulțimea $\{\hat{X}_\mu, \hat{X}_a\}$ ($\mu=0, 1, 2, 3$, $a=3+1, \dots, 3+n$) formează un sistem de $4+n$ câmpuri de vectori liniar independenți pe fibratul principal P care satisfac următoarele relații de comutare [11]:

$$[X_a^*, X_b^*] = f_{ab}^c X_c^* \quad (\text{III.77})$$

$$[X_a^*, \hat{X}_\mu] = 0 \quad (\text{III.78})$$

$$[\hat{X}_\mu, X_\nu] = -F_{\mu\nu}^a X_a^* + C_{\mu\nu}^\gamma X_\gamma \quad (\text{III.79})$$

Relația (III.77) rezultă din izomorfismul dintre mulțimile $\{X_a^*\}$ și $\{X_a\}$, iar relația (III.78) exprimă invarianța la dreapta a câmpurilor $\hat{X}_\mu$ din fibratul principal P . Pentru a da o semnificație relației (III.79) este necesar să subliniem că comutatorul a două lifturi orizontale $[\hat{X}, \hat{Y}]$ coincide cu liftul orizontal al câmpului de vectori $[\hat{X}, \hat{Y}]$. Într-adevăr:

$$\pi(H[\hat{X}, \hat{Y}]) = \pi([\hat{X}, \hat{Y}]) = [\hat{X}, \hat{Y}] \quad ; \quad (\text{III.80})$$

atunci, din (III.79) rezultă că mărimile $F_{\mu\nu}^a$ sînt componentele verticale ale comutatorului $[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu]$. Vom arăta ulterior că aceste mărimi coincid cu tensorul câmpurilor Yang-Mills asociate grupului gauge G .

Din relația (III.79) rezultă și o altă concluzie importantă. Deoarece $\hat{X}_\mu$

sînt cîmpuri de vectori drept-invariante, cantitatea $F_{\mu\nu}^* X_a^*$ este de asemenea drept-invariantă. Aceasta arată, de fapt, dependența lui $F_{\mu\nu}^a$ de spațiul fibrat ales. În plus, folosind identitatea lui Jacobi obținem:

$$\begin{aligned} & [X_a^*, [\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu]] + [\hat{X}_\mu, [\hat{X}_\nu, X_a^*]] + [\hat{X}_\nu, [X_a^*, \hat{X}_\mu]] = \\ & = [X_a^*, -F_{\mu\nu}^b + C_{\mu\nu}^\gamma \hat{X}_\gamma] = -(\partial_a^* F_{\mu\nu}^b) X_b^* - f_{ac}^b F_{\mu\nu}^c X_b^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

de unde rezultă:

$$\partial_a^* F_{\mu\nu}^b = -f_{ac}^b F_{\mu\nu}^c \quad (\text{III.82})$$

Aici $\partial_a^* \equiv \partial_{x_a^*}$ notează derivata direcțională în raport cu cîmpul de vectori X_a^* .

Relația (III.82) este bine cunoscută în teoriile gauge unde $F_{\mu\nu}^a$ reprezintă tensorul cîmpurilor gauge asociate grupului G .

Vom introduce acum potențialele vector în modelul descris anterior și cu ajutorul lor vom scrie tensorul $F_{\mu\nu}^a$ asociat cîmpurilor gauge (cîmpurilor Yang-Mills). Avînd definită conexiunea Γ în fibratul P , este posibil să definim în P o 1-formă ω , cu valori în algebra Lie $\mathfrak{g}$ a grupului de simetrie internă G . Deci ω este un „cîmp vectorial covariant” definit pe P și cu valori în algebra Lie. Mai exact, ω este o aplicație liniară care duce X^* în X_a și $\hat{X}_\mu$ în elementul zero al lui $\mathfrak{g}$. Mărimea ω este numită 1-formă de conexiune asociată conexiunii Γ din fibratul P . Din definiția lui H_p , formulele (III.78) și (III.79), obținem următoarele proprietăți:

$$\omega(X_a^*) = X_a \quad \forall X_a^*, \quad (\text{III.83})$$

$$(R_g \omega)_p(X) = \omega_{pg}(R_g X) = \text{ad}(g^{-1}) \omega_p(X) \quad (\text{III.84})$$

pentru orice $g \in G$ și orice cîmp de vectori X din $T(P)$. Aici $\text{ad}(g)$ este reprezentarea adjunctă a lui $g \in G$, adică o matrice $n \times n$ care acționează asupra vectorului $\omega(X) \in \mathfrak{g}$. Vectorul $\omega(X)$ este o matrice $1 \times n$ cu o singură coloană.

Proprietatea (III.83) rezultă direct din definiția lui ω . Deoarece ω este liniară în X , pentru a demonstra (III.84) este suficient să verificăm relația în următoarele două cazuri:

(i) Dacă X este câmp vectorial orizontal, atunci $R_g X$ este de asemenea orizontal. Atunci, atât $\omega(R_g X)$ cât și $ad(g^{-1})\omega(X)$ se anulează identic și (III.84) este verificată.

(ii) Dacă X este câmp vectorial fundamental, atunci $R_g(X) = ad(g^{-1})X$ și rezultă că

$$\omega_{p_g}(R_g X) = ad(g^{-1})\omega_p(X) \quad (\text{III.85})$$

Invers, dată 1-forma ω cu valori în G care satisface proprietățile (III.83)-(III.84), putem defini o conexiune Γ asociată lui ω . Anume definim spațiul orizontal H_p ca fiind mulțimea tuturor vectorilor tangenți la P în punctul p care sînt duși de ω în elementul zero al lui G . Apoi, descompunem ω după baza X_a :

$$\omega = \omega^a X_a \quad (\text{III.86})$$

unde ω^a sînt acum 1-forme cu valori reale care satisfac proprietățile

$$\omega^a(X_b^*) = \omega_i^a X_b^{*i} = \delta_b^a \quad (\text{III.87})$$

$$\omega^a(\hat{X}_\mu) = \omega_i^a \hat{X}_\mu^i = 0 \quad (\text{III.88})$$

Așadar ω^a -urile sînt câmpuri vectoriale duale cu X_a^* .

Putem exprima acum 1-forma de conexiune ω printr-o familie de forme definite pe o submulțime $U \subset M$ după cum urmează. Fie secțiunea $\sigma(x)$ definită ca o subvarietate a lui P care este difeomorfă cu U , cu proprietatea

$$\pi(\sigma(x)) = x \quad (\text{III.89})$$

Notăm apoi prin σX_μ vectorul din spațiul tangent $\pi_{\sigma(x)} P$ indus de aplicația

$$\sigma : x \in U \rightarrow \sigma(x) \in \pi^{-1}(U) \quad (\text{III.90})$$

Fiecărei secțiuni $\sigma(x)$ îi putem asocia o formă de conexiune $A^{(\sigma)}$ definită pe U și cu valori în G :

$$A^{(\sigma)}(X_\mu) \equiv A_\mu^{(\sigma)a} X_a = \omega(\sigma X_\mu) = \omega^a(\sigma X_\mu) X_a \quad (\text{III.91})$$

După cum se vede, $A^{(\sigma)}$ depinde de alegerea secțiunii $\sigma(x)$.

Cantitatea $A^{(\sigma)}$ poate fi considerată ca o formă de conexiune pe

secțiunea $\sigma(x)$.

Pentru a identifica $A_\mu^{(\sigma)a} = \omega^a(\sigma X_\mu)$ cu potențialele vector ale câmpurilor gauge vom arăta mai întâi că ele se transformă față de diferite alegeri ale secțiunilor $\sigma(x)$ ca și potențialele vector față de transformările gauge. Mai întâi, să observăm că pentru orice două secțiuni $\sigma(x)$ și $\sigma'(x)$ există un element $g(x) \in G$, astfel încât:

$$\sigma'(x) = \sigma(x) g(x) = R_{g(x)} \sigma(x) \quad (\text{III.92})$$

Apoi, oricare ar fi $X_\mu \in T_x(M)$, fie $g X_\mu \in T_{g(x)}(G)$ vectorul indus de transformarea:

$$g(x) : x \in U \rightarrow g(x) \in G \quad (\text{III.93})$$

Rezultă atunci că $\sigma'(x)$ este imaginea lui $(\sigma X_\mu, g X_\mu) \in T_{\sigma(x)}(P) + T_{g(x)}(G)$ prin aplicația $\sigma(x) g(x) \in PXG \rightarrow \sigma'(x) \in P$.

Folosind regula lui Leibniz obținem:

$$\begin{aligned} \sigma' X_\mu &= (\sigma X_\mu) g(x) + \sigma(x) (g X_\mu) = R_{g(x)}(\sigma X_\mu) + \\ &+ (\sigma'(x) g^{-1}(x)) (g X_\mu) = R_{g(x)}(\sigma X_\mu) + \sigma'(x) (L_{g^{-1}(x)} g X_\mu) \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

unde σ se consideră ca o aplicație de la $T_g(G)$ la $T_{\sigma(x)g}(P)$ indusă de:

$$\sigma : g \in G \rightarrow \sigma(x) g \in P \quad (\text{III.95})$$

și analog pentru σ' acționînd pe $L_{g^{-1}} g X_\mu$. Luînd valoarea lui ω pe ambele părți ale ecuației (III.94), obținem:

$$\begin{aligned} X_a A_\mu^{(\sigma')a} &= \omega(\sigma' X_\mu) = X_a \omega^a [R_{g(x)}(\sigma X_\mu) + \sigma'(x) L_{g^{-1}(x)} g X_\mu] = \\ &= ad(g^{-1}(x) X_a) \omega^a(\sigma X_\mu) + \omega(\sigma'(x) L_{g^{-1}(x)} g X_\mu) \end{aligned} \quad (\text{III.96})$$

Aici am folosit liniaritatea lui ω și proprietatea (III.84).

Să observăm apoi că ω este invers aplicației σ' . Într-adevăr dacă X este câmpul de vectori stîng invariant pe G care este egal cu $g X_\mu$ în elementul $g(x) \in G$, atunci valoarea lui X în elementul unitate $e \in G$ este

egal cu $L_{g^{-1}} g X_\mu$ și $\sigma'(L_{g^{-1}(x)} g X_\mu)$ reprezintă valoarea câmpului de vectori fundamental X^* în punctul P . Atunci avem:

$$\omega(\sigma'(L_{g^{-1}(x)} g X_\mu)) = L_{g^{-1}(x)} g X_\mu \quad (\text{III.97})$$

Folosind această proprietate și definiția (III.91) a lui $A^{(\sigma)}$, ecuația (III.96) poate fi retranscrisă sub forma:

$$A_\mu^{(\sigma)a} X_a = (ad(g^{-1}) X_a) A_\mu^{(\sigma)a} + L_{g^{-1}(x)} g X_\mu \quad (\text{III.98})$$

Dar în reprezentarea adjuncă putem scrie:

$$X_a = (X_a)_a^b = f_{ac}^b \quad (\text{III.99})$$

și în plus avem:

$$g(x) = \exp(\theta^b(x) X_b) \quad (\text{III.100})$$

unde $\theta^a(x)$ ($a = 3 + 1, \dots, 3 + n$) sînt coordonatele canonice ale lui $g(x) \in G$. Atunci, ecuația (III.98) se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned} A_\mu^{(\sigma)a} X_a = & \exp(-\theta^b(x) X_b) X_a \exp(\theta^c(x) X_c) A_\mu^{(\sigma)} + \\ & + \exp(-\theta^b(x) X_b) \partial_\mu (\exp(X_c \theta^c(x))) \end{aligned} \quad (\text{III.101})$$

Această formulă constituie binecunoscuta lege de transformare a potențialelor vector din teoriile gauge. Invers, putem verifica ușor că pentru orice mulțime de 1-forme $\{A^{(\sigma)}\}$ definite pe $U \in M$, cu valori în G și satisfăcînd condiția (III.10) există o conexiune unică care induce $\{A^{(\sigma)}\}$ prin procedeul dat în ecuația (III.91).

Așadar, conchidem că potențialele gauge $A_\mu^a(x)$ din teoriile gauge sînt tocmai secțiunile pe U care depind de formele de conexiune. O alegere a unei secțiuni corespunde la o alegere de etalon a modelului descris.

Este posibil apoi să introducem o metrică pe fibratul principal astfel încît să devină un spațiu Riemann. În acest scop presupunem că spațiul bază $M = R \times S^3$ este un spațiu Riemann avînd metrica $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) dată. Pentru varietatea grupului de etalon G vom alege metrica invariantă g_{ab} de forma:

$$g_{ab} = f_{ac}^d f_{db}^c \quad (\text{III.102})$$

Vom presupune ca G este grup semisimplu, așa cum se consideră de obicei în teoriile gauge. Atunci metrica g_{ab} este inversabilă. Introducem apoi o metrică γ_{ij} pe fibratul P care este compatibil cu metrica $g_{\mu\nu}$ de pe spațiul bază $M = R \times S^3$ și cu metrica g_{ab} de pe varietatea grupului G , adică:

$$\gamma_{ij} \hat{X}_\mu^i X_\nu^j = g_{\mu\nu} \quad (\text{III.103})$$

$$\gamma_{ij} X_a^{*i} X_b^{*j} = g_{ab} \quad (\text{III.104})$$

Dacă, în plus, cerem ca metrica γ_{ij} să satisfacă condiția ca subspațiile orizontale și verticale să fie ortogonale, atunci ea este unic definită. Avem deci următoarele proprietăți pentru metrica γ_{ij} :

$$\gamma_{ij} \hat{X}_\mu^i \hat{X}_\nu^j = g_{\mu\nu} \quad (\text{III.105})$$

$$\gamma_{ij} \hat{X}_\mu^i X_a^{*j} = 0 \quad (\text{III.106})$$

$$\gamma_{ij} X_a^{*i} X_b^{*j} = g_{ab}$$

Definiția metricii γ_{ij} este independentă de bază aleasă. O astfel de metrică a fost dată anterior de către Kaluza [16] pentru grupul abelian $U(1)$ (cu $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$ și $g_{44} = 11$) și de către de Witt și Kerner [17] pentru un grup gauge neabelian.

Cu ajutorul metricii γ_{ij} introdusă pe fibratul principal P putem arăta că mărimile $F_{\mu\nu}^a$ reprezintă tensorul câmpurilor Yang-Mills (gauge) introduse de grupul de simetrie locală G . Pentru aceasta vom calcula a 2-forma de curbură orizontală asociată metricii γ_{ij} . Mai întâi vom introduce o bază convenabilă în fibratul P și apoi vom obține componentele tensorului de curbură al lui P în această bază.

Deoarece fibratul P este local trivial putem realiza întodeauna o parametrizare locală, alegem pentru $p \times \pi^{-1}(U)$ componentele $(\pi(p), \Phi(p)) \equiv (x, g) \in U \times G$. În această parametrizare $\pi^{-1}(U)$ e difeomorf cu produsul direct $U \times G$ și deci putem scrie $p = (x, g)$.

Dacă în U și G avem definită câte o bază, atunci este posibil să introducem o bază în $\pi^{-1}(U)$ dată de produsul celor două baze. Astfel, vom folosi baza $\{\bar{X}_\mu, \bar{X}_a\}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3; a = 3 + 1, \dots, 3 + n$) asociată bazelor X_μ

din U și X_a din G . Evident, conform definiției avem $\bar{X}_a \equiv X_a^*$ dar $\bar{X}_\mu \neq \hat{X}_\mu$. Ca urmare, mărimile $\bar{X}_\mu$ formează o algebră Lie închisă dar acest lucru nu este valabil și pentru $\hat{X}_\mu$ dat fiind că $[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu]$ (comutatorul) are și o componentă verticală [vezi ecuația (III.79).] Subliniem că o conexiune Γ , care ar avea proprietatea că toate componentele verticale ale comutatorilor $[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu]$ sînt nule, se numește conexiune plată (flat conection). Pentru o astfel de conexiune toate componentele $F_{\mu\nu}^a$ sînt identic nule, deși potențialele $A_\mu^{(\sigma)a}$ dependente de secțiunea σ considerată nu sînt nule.

Relațiile de comutare pentru mărimile $\bar{X}^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 3 + n$) considerate drept cîmpuri de vectori pe fibratul P , pot fi scrise sub forma [11] [19] [20]:

$$[\bar{X}_a, \bar{X}_b] = f_{ab}^c \bar{X}_c \quad (\text{III.108})$$

$$[\bar{X}_a, \bar{X}_\mu] \equiv [\bar{X}_a, \hat{\partial}_\mu] = 0 \quad (\text{III.109})$$

$$[\bar{X}_\mu, \bar{X}_\nu] = [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = C_{\mu\nu}^\gamma \hat{\partial}_\gamma = C_{\mu\nu}^\gamma \bar{X}_\gamma \quad (\text{III.110})$$

Folosind apoi definiția (III.91) putem asocia potențialele gauge $A_\mu^{(\sigma)a}$ familiei de secțiuni $\sigma_g(x)$, $g \in G$, punînd (III.111)

Pentru a ajunge la potențialele gauge în fizică vom introduce notația (III.112)

$$A_\mu^{(\sigma)a} = \omega^a(\bar{X}_\mu(x)) \quad (\text{III.111})$$

$$B_\mu^a(x, g) \equiv A_\mu^{(\sigma_g)a} = \omega^a(\bar{X}_\mu(xg)) \quad (\text{III.112})$$

Atunci folosind ecuațiile (III.87) și (III.88), liftul orizontal $\hat{X}_\mu$ se poate scrie în baza locală direct sub forma

$$\hat{X}_\mu = \bar{X}_\mu - \bar{X}_a \omega^a(\bar{X}_\mu) = \hat{\partial}_\mu - \bar{X}_a B_\mu^a(x, g) \equiv D_\mu \quad (\text{III.113})$$

Aici D_μ reprezintă derivatele covariante bine cunoscute în teoriile gauge:

Potențialele gauge B_μ^a satisfac proprietatea

$$\bar{\partial}_a B_\mu^b(x, g) = \partial_a^* B_\mu^b - f_{ac}^b B_\mu^c(x, g) \quad (\text{III.114})$$

Cu ajutorul relațiilor (III.113) și (III.114) obținem următoarele relații de comutare:

$$[X_a^*, X_b^*] = [\bar{X}_a, \bar{X}_b] = f_{ab}^c \bar{X}_c = f_{ab}^c X_c^* \quad (III.115)$$

$$[X_a^*, \hat{X}_\mu] = [\bar{X}_a, \bar{X}_\mu - \bar{X}_b B_\mu^b] = [\bar{X}_a, D_\mu] = 0 \quad (III.116)$$

$$\begin{aligned} [\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] &= [\bar{X}_\mu - \bar{X}_a B_\mu^a, \bar{X}_\nu - \bar{X}_b B_\nu^b] = [D_\mu, D_\nu] = \\ &= C_{\mu\nu}^\gamma \bar{X}_\gamma - (\hat{\partial}_\mu B_\nu^a - \hat{\partial}_\nu B_\mu^a + f_{bc}^a B_\mu^b B_\nu^c - C_{\mu\nu}^\gamma B_\gamma^a) \bar{X}_a = \\ &= -(\hat{\partial}_\mu B_\nu^a - \hat{\partial}_\nu B_\mu^a + f_{bc}^a B_\mu^b B_\nu^c - C_{\mu\nu}^\gamma B_\gamma^a) \bar{X}_a + \\ &\quad + C_{\mu\gamma}^\gamma (\bar{X}_\gamma - \hat{\partial}_\mu B_\gamma^a - B_\gamma^a \bar{X}_a) \end{aligned} \quad (III.117)$$

Comparând ecuația (III.117) cu ecuația (III.79) și ținând seama că $X_\gamma = \bar{X}_\gamma - B_\gamma^a \bar{X}_a$, obținem următoarea expresie pentru tensorul F_μ^a în funcție de potențialele gauge B_μ^a :

$$F_{\mu\nu}^a = \hat{\partial}_\mu B_\nu^a - \hat{\partial}_\nu B_\mu^a + f_{bc}^a B_\mu^b B_\nu^c - C_{\mu\nu}^\gamma B_\gamma^a \quad (III.118)$$

Ultimul termen este determinat de necomutativitatea bazei $\hat{\partial}_\mu$ în spațiul timp $M = R \times S^3$ [7].

Cu ajutorul ecuației (III.114) putem demonstra covarianța gauge a tensorului $F_{\mu\nu}^a$.

$$\partial_a^* F_{\mu\nu}^b(x, g) = \hat{\partial}_a F_{\mu\nu}^b(x, g) = -f_{ac}^b F_{\mu\nu}^c(x, g) \quad (III.119)$$

Această relație arată că mărimile $F_{\mu\nu}^a$ sînt într-adevăr componentele tensorului gauge introduse de simetria locală G .

În sfîrșit, folosind identitatea lui Jacobi:

$$[\hat{X}_\rho, [\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu]] + [\hat{X}_\mu, [\hat{X}_\nu, \hat{X}_\rho]] + [\hat{X}_\nu, [\hat{X}_\rho, \hat{X}_\mu]] = 0 \quad (III.120)$$

obținem relația:

$$D_\rho F_{\mu\nu}^a + D_\mu F_{\nu\rho}^a + D_\nu F_{\rho\mu}^a = 0 \quad (III.121)$$

care este cunoscută sub denumirea de *identitatea lui Bianchi*.

Pentru a calcula tensorul de curbura al torsiunii introdusă în fibratul P , vom folosi baza $\{\bar{X}_\mu, \bar{X}_a\}$ $\mu = 0, 1, 2, 3$, $a = 3+1, \dots, 3+n$ în spațiul tangent $T_p(P)$

în punctul $p \in P$ și vom introduce baza duală corespunzătoare $\{\eta^\mu, \eta^a\}$ definită prin relațiile:

$$\langle \eta^\mu, \bar{X}_\nu \rangle \equiv \eta^\mu(\bar{X}_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (\text{III.122})$$

$$\langle \eta^a, \bar{X}_b \rangle \equiv \eta^a(\bar{X}_b) = \delta_b^a \quad (\text{III.123})$$

Atunci metrica γ_{ij} a fibratului principal P devine:

$$ds^2 = (g_{\mu\nu} + g_{ab} B_\mu^a B_\nu^b) \eta^\mu \eta^\nu + g_{ab} \eta^a \eta^b + B_\mu^a g_{ab} \eta^\mu \eta^b + g_{ab} B_\nu^b \eta^a \eta^\nu \quad (\text{III.124})$$

În cele ce urmează este mai convenabil să introducem o altă bază duală $\{\omega^\mu, \omega^a\}$ în spațiul dual $T_p^*(P)$, $p \in P$ definită prin notațiile:

$$\omega^\mu(\bar{X}_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (\text{III.125})$$

$$\omega^\mu(\bar{X}_a) = 0 \quad (\text{III.126})$$

$$\omega^a(\bar{X}_\mu) = 0 \quad (\text{III.127})$$

$$\omega^a(\bar{X}_b) = \delta_b^a \quad (\text{III.128})$$

Deoarece 1-formele $\omega^\mu = \eta^\mu$ satisfac identic condițiile (III.125) și (III.126), vom alege:

$$\omega^a = \eta^a + A_\mu^a \eta^\mu \quad (\text{III.129})$$

Atunci, introducînd (III.129) în (III.127) și ținînd seama de (III.124) obținem $A_\mu^a = B_\mu^a$. Deci, în continuare vom folosi în fibratul P următoarea bază:

$$\omega^\mu = \eta^\mu \quad (\text{III.130})$$

$$\omega^a = \eta^a + B_\mu^a \eta^\mu$$

În această bază, metrica γ_{ij} devine:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu + g_{ab} \eta^a \eta^b \quad (\text{III.131})$$

Această expresie dă posibilitatea să folosim formalismul lui Cartan în calculul coeficienților de conexiune și a curburii fibratului principal P .

Prima ecuație a lui Cartan are forma generală:

$$d\omega^i = \bar{\Gamma}_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k = -D_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \quad (\text{III.132})$$

unde $[j k]$ notează antisimetrizarea în indicii j și k , adică $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \bar{\Gamma}_{kj}^i$. În baza folosită de noi coeficienții au următoarele expresii:

$$D_{\mu\nu}^\rho = C_{\mu\nu}^\rho = 2\varepsilon_{0\mu\nu\rho} \quad (\text{III.133})$$

$$D_{bc}^a = f_{bc}^a \quad (\text{III.134})$$

$$D_{\mu a}^\rho = D_{ab}^\rho = D_{\mu\nu}^\rho = D_{b\nu}^\rho = 0 \quad (\text{III.135})$$

Deoarece spațiul fibrat P este Riemannian, conexiunea Γ introdusă anterior peste metrică și deci torsiunea sa este nulă

$$\Gamma_{ij}^i = 0 \quad (\text{III.136})$$

și corespunzător:

$$\bar{\Gamma}_{ijk} + \bar{\Gamma}_{jik} = 0 \quad (\text{III.137})$$

Atunci, folosind ecuația lui Cartan (III.132), obținem următoarele expresii pentru coeficienții de conexiune:

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} = \Gamma_{\mu\nu\rho}$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu a} = -\bar{\Gamma}_{\mu a\nu} = -\frac{1}{2}F_{a\mu\nu}$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu ab} = \bar{\Gamma}_{\mu ba} = \bar{\Gamma}_{a\mu b} = -\bar{\Gamma}_{b\mu a} = 0 \quad (\text{III.138})$$

$$\bar{\Gamma}_{a\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{a\mu\nu}$$

$$\bar{\Gamma}_{abc} = -\bar{\Gamma}_{bac} = \Gamma_{abc}$$

unde $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ și Γ_{abc} sînt coeficienții de conexiune ai varietăților $M = R \times S^3$ și respectiv G , pe care avem definite metricile $g_{\mu\nu}$ și g_{ab} .

Apoi, 1-formele de conexiune $\bar{\Gamma}_{ij} = \bar{\Gamma}_{ijk} \omega^k$ sînt date de expresiile:

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} \omega^\rho = \frac{1}{2} F_{a\mu\nu} \omega^a$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu a} = -\bar{\Gamma}_{a\mu} = \bar{\Gamma}_{\mu ai} \omega^i = -\frac{1}{2} F_{a\mu\nu} \omega^\nu \quad (\text{III.139})$$

$$\bar{\Gamma}_{ab} = \bar{\Gamma}_{abi} \omega^i = \Gamma_{abc} \omega^c$$

A doua ecuație a lui Cartan se scrie sub forma:

$$d\bar{\Gamma}_{ij} + \gamma^{kl} \bar{\Gamma}_{ik} \wedge \bar{\Gamma}_{lj} = \frac{1}{2} \bar{R}_{ijkl} \omega^k \wedge \omega^l \quad (\text{III.140})$$

unde R_{ijkl} este tensorul de curbura Riemann al fibratului principal P . Introducând (III.139) în (III.140) obținem următoarele expresii ale componentelor tensorului de curbura Riemann:

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{4} F_{\mu}^a [F_{(a\nu)\rho\sigma}] - \frac{1}{2} F_{a\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a$$

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho a} = -\frac{1}{2} \nabla_{\rho} F_{a\mu\nu}$$

$$\bar{R}_{\mu\nu ab} = F_{\mu\nu}^c \Gamma_{abc} - \frac{1}{4} g^{\rho\sigma} F_{a\rho} [F_{|b\sigma|\mu\nu}] \quad (\text{III.141})$$

$$\bar{R}_{\mu a \nu b} = \frac{1}{2} \Gamma_{cab} F_{\mu\nu}^c - \frac{1}{4} g^{\rho\sigma} F_{a\rho\nu} F_{b\mu\sigma}$$

$$\bar{R}_{abcd} = R_{abcd}$$

$$\bar{R}_{\mu abc} = 0$$

Tensorul Ricci $\bar{R}_{ij}$ definit prin relația:

$$\bar{R}_{ij} = \gamma^{km} \bar{R}_{kimj} \quad (\text{III.142})$$

are componentele:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} F_{a\rho\mu} F_{\sigma\nu}^a$$

$$\bar{R}_{\mu a} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \nabla_\rho F_{a\mu\nu} \quad (\text{III.143})$$

$$\bar{R}_{ab} = R_{ab} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{a\rho\mu} F_{b\sigma\nu}$$

unde $R_{ab} = \frac{1}{4} g_{ab}$ și $R_{\mu\nu}$ sînt tensorii Ricci ai lui G și respectiv ai lui $M = R \times S^3$, iar ∇_ρ este derivată gauge și general covariantă din P . De exemplu:

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu}^a = \hat{\partial}_\rho F_{\mu\nu}^a - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma F_{\sigma\nu}^a - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma F_{\mu\sigma}^a + f_{bc}^a B_\rho^b F_{\mu\nu}^c \quad (\text{III.144})$$

În sfîrșit, putem calcula scalarul de curbura R al fibratului principal P , folosind definiția:

$$\bar{R} = \gamma^{ij} \bar{R}_{ij} \quad (\text{III.145})$$

Folosind expresiile (III.143) obținem:

$$\bar{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{a\rho\mu} F_{\sigma\nu}^a + g^{ab} R_{ab} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{a\rho\mu} F_{\sigma\nu}^a \quad (\text{III.146})$$

sau echivalent:

$$\bar{R} = R_M + R_G - \frac{1}{4} F^2 \quad (\text{III.147})$$

unde am notat $F^2 = g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{a\rho\mu} F_{\sigma\nu}^a$, iar $R_M = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ și $R_G = g^{ab} R_{ab}$ sînt curburele scalare ale varietăților $M = R \times S^3$ și respectiv G .

Avînd calculate aceste mărimi putem constitui acum teoria (modelul) unificat pentru gravitație și cîmpurile Yang-Mills. Vom postula că Lagrangeanul modelului este de forma:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\gamma} \bar{R} \quad (\text{III.148})$$

unde $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ este determinantul metricii γ_{ij} a fibratului principal P . Acțiunea corespunzătoare acestui model se scrie atunci sub forma:

$$I_{4+n} = \int \sqrt{-\gamma} \bar{R} d^4 x d^n G \quad (\text{III.149})$$

Putem efectua integrarea după variabilele varietății grupului G și obținem atunci acțiunea pe spațiul-timp $M = R \times S^3$. Folosind expresia (III.147), obținem:

$$I_4 = V_G \int \sqrt{-g_M} \left(R_M + R_G - \frac{1}{4} F^2 \right) d^4 x \quad (\text{III.150})$$

Aici, V_G reprezintă volumul (constant) al varietății grupului G , iar $g_M = \det(g_{\mu\nu})$.

Ecuția (III.150) arată că acțiunea I_4 este o sumă de trei termeni: primul coincide cu curbura R_M a spațiului-timp 4-dimensional $M = R \times S^3$, al doilea este tocmai Lagrangeanul Yang-Mills al câmpurilor gauge, iar al treilea reprezintă curbura R_G a grupului G care joacă rolul unei constante cosmologice. Termenul care conține R_M descrie câmpul gravitațional și conduce la teoria lui Einstein a câmpului gravitațional pe spațiul $M = R \times S^3$. Deci am obținut o teorie unificată a gravitației și câmpului Yang-Mills abelian asociat grupului gauge G .

Modelul dezvoltat în această secțiune are o structură ce combină geometria spațiului-timp cu spațiul de simetrie internă. Constanta cosmologică apare în mod natural, fiind determinată de curbura constantă a varietății grupului G .

Constanta de cuplaj universală, g , a câmpului Yang-Mills este arbitrară în acest model și, pentru simplitate, a fost luată egală cu unitatea: $g = 1$. Putem introduce ușor această constantă în model înlocuind în toate rezultatele de mai sus pe B_μ^a prin $g B_\mu^a$.

Rămîne deschisă problema construirii unui model gauge pentru gravitație și câmpurile gauge luînd drept grup de simetrie produsul direct $\mathcal{P} \times G$ dintre grupul Poincaré $\mathcal{P}$ și grupul de simetrie intern. Acest lucru este mai dificil, deoarece transformările grupului $\mathcal{P} \times G$ duc elemente ale unei fibre a spațiului fibrat P în elemente ale altei fibre, spre deosebire de grupul G care duce o fibră în ea însăși.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Agop, N. Mazilu, *Fundamente ale fizicii moderne*, Editura Junimea, Iași, 1989.
2. S. Dumitru, *Microfizica*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1984.
3. L. D. Landau, E. M. Lipșit, *Mecanica*, Editura Tehnică, București, 1957.

4. A.Einstein, *Teoria relativității*, Editura Tehnică, București, 1957.
5. N.Ionescu Pallas, *Relativitate generală și cosmologie*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1980.
6. A.Ashtekar, „A 3+1 formulation of Einstein Self-duality”, J.A.Isenberg Editor, AMS, vol.71, 1986, p.39.
7. G.Zet, Found, Phys. 20, 111, 1990.
8. M.Carmeli, S.Malin. Found. Phys. 15, 791, 1986.
9. M.Carmeli, S.Malin, Found. Phys. 17, 193, 1987.
10. M.Carmeli, S.Malin, Found. Phys. 15, 1019, 1985.
11. G.Zet, C.Pasnicu, M.Agop, Found. Phys. 21, 473, 1991.
12. G.Zet, C.Dariescu, A.Dariescu, Bult. Inst. Politehnic Iași, 1991 (sub tipar).
13. S.Kobayoshi, K.Nomizu, *Foundation of Differentiable Geometry*, Interscience Publishers 1963.
14. S.Sternberg, *Lectures of Differential Geometry*, Prentice-Hall, Inc., 1964.
15. R.L.Bishop, R.I.Cristtenduw, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York and London, 1963.
16. T.Kaluza, Sitzber, Press. Acad. Wiss, p. 966, 1921.
17. B.De Witt, „*Dynamical Theories of Groups and Field*”, Gordon and Breach, H.Y., p.139.
18. R.Kerner, Ann. Inst. H.Poincaré, 9, 143, 1968.
19. C.Dariescu, Aura Dariescu, *Lucrare nepublicată*.
20. G.Zet, C.Dariescu, A.Dariescu, *Tensor* N°55, 52, 1, 1993.
21. M.Agop, *Lucrare nepublicată*.

IV. SUPERSIMETRIE. SUPERGRAVITAȚIA

Prezentul capitol are ca scop o prezentare sintetică a supersimetriei și grefat pe aceasta a supergravitației. Facem observația că toate mărimile ce intervin au semnificațiile obișnuite din teoriile de supercîmp.

IV.1 SUPERSPAȚII (A.Dariescu)

Considerăm un superspațiu 8 dimensional. La cele patru coordonate spațio-temporale x_μ se adaugă variabilele Grassmann $\theta_A, \bar{\theta}_A$.

Grupul de simetrie acționează asupra cîmpurilor cu ajutorul operatorului:

$$L(x_\mu, \theta_A, \bar{\theta}_A) = \exp(-ix_\mu P^\mu + i\theta Q + i\bar{\theta} \bar{Q}) \quad (\text{IV.1})$$

În general, un supercîmp ϕ definit pe un superspațiu se scrie sub forma unei dezvoltări finite în serie:

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{X}(x) + \theta \theta m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} n(x) + \\ & + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} V_\mu(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \psi(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} d(x) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Termenii de tipul $(\theta \theta)^2$ sau $(\bar{\theta} \bar{\theta})^2$ sînt egali cu zero. $f(x), m(x), n(x), d(x)$ sînt cîmpuri scalare, $\phi(x), \psi(x)$ sînt spinoriale iar $V_\mu(x)$ este un cîmp vectorial.

Sub o transformare oarecare T_α :

$$T_\alpha \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = L(0, \lambda, \bar{\lambda}) \phi(x, \theta, \bar{\theta}) L^{-1}(0, \alpha, \bar{\alpha}) \quad (\text{IV.3})$$

cîmpul ϕ devine:

$$T_\alpha \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi(x + i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}) \quad (\text{IV.4})$$

Considerăm o transformare infinitesimală și calculăm variația lui ϕ în urma aplicării operatorului T_α :

$$\delta \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = T_\alpha \phi - \phi = \left\{ \alpha \partial_\theta + \bar{\alpha} \partial_{\bar{\theta}} + i(\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} - \alpha \sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu \right\} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{IV.5})$$

Ținînd cont de (IV.2) și identitatea după puterile lui θ și $\bar{\theta}$ vom obține: [12]

$$\delta f(x) = \alpha \phi(x) + \bar{\alpha} \bar{X}(x)$$

$$\delta \phi_A(x) = 2\alpha_A m(x) + (\sigma^\mu \bar{\alpha})_A (i\partial_\mu f(x) + V_\mu(x))$$

$$\delta \bar{X}^A = 2\bar{\alpha}^A n(x) + (\alpha \sigma^\mu \varepsilon)^A \times (i\partial_\mu f(x) - V_\mu(x))$$

$$\partial m(x) = \bar{\alpha} \bar{\lambda}(x) - \frac{i}{2} \partial_\mu \phi(x) \sigma^\mu \bar{\alpha} \quad (\text{IV.6})$$

$$\delta n(x) = \alpha \psi(x) + \frac{i}{2} \alpha \sigma^\mu \partial_\mu \bar{X}(x)$$

$$\delta V_\mu(x) = \alpha \sigma_\mu \bar{\lambda}(x) + \psi(x) \sigma_\mu \bar{\alpha} + \frac{i}{2} \alpha \partial_\mu \phi(x) - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{X}(x) \bar{\alpha}$$

$$\delta d(x) = \frac{i}{2} \partial_\mu \psi(x) \sigma^\mu \bar{\alpha} + \frac{i}{2} \alpha \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x)$$

$$\delta \bar{\lambda}^A(x) = 2\bar{\alpha}^A d(x) + \frac{i}{2} \bar{\alpha}^A \sigma^\mu V_\mu(x) + i(\alpha \sigma^\mu \varepsilon)^A \partial_\mu m(x)$$

$$\delta \psi_A(x) = 2\alpha_A d(x) - \frac{i}{2} \alpha_A \sigma^\mu V_\mu(x) + i(\sigma^\mu \bar{\alpha})_A \partial_\mu n(x)$$

Definim ca derivată covariantă pentru supercîmpul ϕ :

$$D_A = \partial_A + i\sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu \quad (\text{IV.7})$$

și respectiv:

$$D^A = -\partial^A - i\bar{\theta}_{\dot{B}} \sigma^{\mu\dot{B}A} \partial_\mu \quad (\text{IV.8})$$

$$\bar{D}_{\dot{\lambda}} = -\bar{\partial}_{\dot{\lambda}} - i\theta^B \sigma_{B\dot{\lambda}}^{\mu} \partial_{\mu} \quad (\text{IV.9})$$

$$\bar{D}^{\dot{\lambda}} = \bar{\partial}^{\dot{\lambda}} + i\sigma^{\mu\dot{\lambda}B} \theta_B \partial_{\mu} \quad (\text{IV.10})$$

IV.2 SUPERCÂMPURI CHIRALE (A.Dariescu)

Supercâmpurile care satisfac constrîngerile de tipul [6]:

$$D\phi = 0 \quad (\text{IV.11})$$

se numesc supercâmpuri chirale.

Cîmpurile chirale left-handed respectă constrîngerea:

$$\bar{D}_{\dot{\lambda}} \phi = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Forma cea mai generală a unui supercîmp ce satisface (IV.12) este [5]:

$$\phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \quad (\text{IV.13})$$

cu

$$y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \quad (\text{IV.14})$$

Cîmpurile chirale right-handed satisfac constrîngerea:

$$D_{\lambda} \phi^* = 0 \quad (\text{IV.15})$$

și au forma generală:

$$\phi^* = A^*(z) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(z) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(z) \quad (\text{IV.16})$$

cu

$$z^{\mu} = x^{\mu} - i\bar{\theta}\sigma^{\mu}\bar{\theta} \quad (\text{IV.17})$$

Produsul $\phi_i \phi_k$ a două cîmpuri left-handed satisface constrîngerea (IV.12) deci este tot un cîmp chiral left-handed. Analog pentru cîmpurile chirale right-handed.

Fie un cîmp real:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^*(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{IV.18})$$

Folosind dezvoltarea (IV.2) și impunînd condiția (IV.18), vom obține

următoarele condiții pentru componentele lui V [12]:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f^*(x) \\
 \phi(x) &= X(x) \\
 m(x) &= n^*(x) \\
 V_\mu(x) &= V_\mu^*(x) \\
 \lambda(x) &= \psi(x) \\
 d(x) &= d^*(x)
 \end{aligned}
 \tag{IV.19}$$

Suma dintre un câmp chiral left-handed și un câmp chiral right-handed satisface condiția (IV.18):

$$(\phi + \phi^*)^+ = \phi + \phi^*$$

Efectuînd o transformare:

$$V \rightarrow V'(x, \theta, \bar{\theta}) = V(x, \theta, \bar{\theta}) + \phi(x, \theta, \bar{\theta}) + \phi^*(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{IV.20}$$

și alegînd un câmp ϕ particular astfel încît o parte din componentele lui V să se anuleze, vom obține:

$$V_{W,Z}(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} V_\mu + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda} + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x) \tag{IV.21}$$

WZ înseamnă gaugeul Wess-Zumino. Câmpul gauge $V_\mu(x)$ se transformă:

$$V_\mu(x) \rightarrow V'_\mu + i \partial_\mu (A - A^*) \tag{IV.22}$$

$\lambda(x)$ este partenerul său supersimetric iar $D(x)$ este un câmp scalar auxiliar care se elimină din ecuațiile Euler-Lagrange. Se pot calcula puterile lui $V_{W,Z}$ utilizînd faptul că θ și $\bar{\theta}$ sînt variabile Grassmann:

$$V_{WZ}^2 = \frac{1}{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} V_\mu V^\mu \tag{IV.23}$$

Pentru un supercîmp vector $V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta})$ se definește puterea supercîmpului astfel:

$$W_A = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} D_A V_{WZ} \quad (IV.24)$$

$$\bar{W}_{\dot{A}} = -\frac{1}{4} D D \bar{D}_{\dot{A}} V_{WZ}$$

Se verifică că W_A și $\bar{W}_{\dot{A}}$ sînt supercîmpuri chirale. Mai mult, W_A și $\bar{W}_{\dot{A}}$ sînt invariante față de transformarea gauge supersimetrică (IV.20). Trecînd la noile variabile y, θ și respectiv $z, \bar{\theta}$ și efectuînd calculele, vom obține:

$$W_A = \lambda_A(y) + 2D(y)\theta_A + (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)\sigma_{A\dot{B}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} \quad (IV.25)$$

și în mod similar pentru $\bar{W}_{\dot{A}}$. Am folosit notația:

$$F_{\mu\nu}(y) = \partial_\mu V_\nu(y) - \partial_\nu V_\mu(y) \quad (IV.26)$$

IV.3 CONSTRUCȚIA LAGRANGIENILOR SUPERSIMETRICI (A.Dariescu)

Definim următoarele elemente de volum ale superspațiului [1]:

$$d^2\theta = -\frac{1}{4} \varepsilon_{AB} d\theta^A d\theta^B$$

$$d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} d\bar{\theta}_{\dot{A}} d\bar{\theta}_{\dot{B}} \quad (IV.27)$$

$$d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta}$$

Se cunosc următoarele proprietăți:

$$\int d^2\theta (\theta\theta) = 1$$

$$\int d^2\bar{\theta} (\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1$$

$$\int d^2\bar{\theta} = \int d^2\theta = 0$$

$$\int d^2\theta \theta_A = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}_{\dot{A}} = 0 \quad (IV.28)$$

A calcula integrala $\int d^4\theta \Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ este echivalent cu a proiecta după componenta cu gradul cel mai înalt, din dezvoltarea în serie.

Forma cea mai generală a unui lagrangean supersimetric renormabil este [1]:

$$\mathcal{L} = \phi_i^* \phi_i + \left[\left(g_i \phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} \lambda_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) \delta^2(\bar{\theta}) + h.c. \right] \quad (IV.29)$$

unde am notat:

$$(\theta \theta) = \delta^2(\theta)$$

și

$$(\bar{\theta} \bar{\theta}) = \delta^2(\bar{\theta})$$

Cu ajutorul lagrangeanului, construim acțiunea:

$$a = \int d^4x \int d^4\theta \mathcal{L} \quad (IV.30)$$

Înlocuim câmpurile chirale cu dezvoltările în serie cunoscute, efectuăm integrala în raport cu variabilele Grassmann și obținem:

$$\begin{aligned} a = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu A_i^*(x) \partial^\mu A_i(x) - \frac{1}{4} A_i^*(x) \square A_i(x) - \right. \\ \left. - A_i(x) \square A_i^*(x) + \frac{i}{2} \partial_\mu \psi_i(x) \sigma^\mu \bar{\psi}_i(x) - \frac{i}{2} \psi_i(x) \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i(x) + \right. \\ \left. + F_i^* F_i + \left[m_{ij} (A_i(x) F_j(x) - \frac{1}{2} \psi_i(x) \psi_j(x)) + \right. \right. \\ \left. + \lambda_{ijk} (A_i(x) A_j(x) F_k(x) - \right. \\ \left. \left. - \psi_i(x) \psi_j(x) A_k) + g_i F_i(x) + h.c. \right] \right\} \quad (IV.31) \end{aligned}$$

Câmpurile auxiliare $F_i(x)$ se vor elimina din ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpul $F_i(x)$.

Pentru construirea lagrangeanului gauge supersimetric, vom folosi câmpurile chirale W_A și $\bar{W}_{\dot{A}}$:

$$a = \int d^4x \int d^4\theta [W^A W_A \delta^2(\bar{\theta}) + \bar{W}_{\dot{A}} W^{\dot{A}} \delta^2(\theta)] \quad (IV.32)$$

Trecînd la componentele de câmp, obținem:

$$a = \int d^4x \left[8D^2(x) - F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - 4i\lambda(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(x) \right] \quad (\text{IV.33})$$

IV.4 RUPEREA SPONTANĂ A SUPERSIMETRIEI (A.Dariescu)

Scriem lagrangeanul (IV.29) pentru cazul unui singur câmp scalar:

$$\mathcal{L} = \phi^+\phi + \left[\left(g\phi + \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{1}{3}\lambda\phi^3 \right) + h.c. \right] \quad (\text{IV.34})$$

Separăm termenul cinetic $\phi^+\phi$ de termenul potențial:

$$W(\phi) = g\phi + \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{1}{3}\lambda\phi^3 \quad (\text{IV.35})$$

Funcționala $W(\phi)$ poartă numele de superpotențial.

Pe acest exemplu simplu putem verifica:

$$\int d^2\phi W(\phi) = \frac{\partial W(A)}{\partial A} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A^2} \psi\psi \quad (\text{IV.36})$$

În general, pentru n supercîmpuri ϕ_i putem scrie:

$$\int d^4\phi W(\phi_1 \dots \phi_n) \delta^2(\bar{\phi}) = W_i F_i - \frac{1}{2} W_{ij} \psi_i \psi_j \quad (\text{IV.37})$$

unde am notat:

$$W_i = \frac{\partial W(A_1 \dots A_n)}{\partial A_i} \quad (\text{IV.38})$$

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W(A_1 \dots A_n)}{\partial A_i \partial A_j} \quad (\text{IV.39})$$

Partea din lagrangean care nu conține derivate sau câmpuri fermionice se numește scalar și este legată de superpotențialul W prin expresia:

$$V(A, A^*) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \right|^2 = \sum_i |F_i|^2 \quad (\text{IV.40})$$

Hamiltonianul H are forma:

$$H = \frac{1}{4} (Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2) \quad (\text{IV.41})$$

Condițiile de invarianță a stării de vid față de un grup de transformări:

$$Q_i |0\rangle = 0 \quad (\text{IV.42})$$

$$\bar{Q}_i |0\rangle = 0$$

implică:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.43})$$

adică valoarea minimă a energiei corespunde lui $A = 0$. Dacă condițiile (IV.42) nu sînt satisfăcute, atunci:

$$V_{\min} = \langle 0 | H | 0 \rangle > 0 \quad (\text{IV.44})$$

și supersimetria este ruptă spontan.

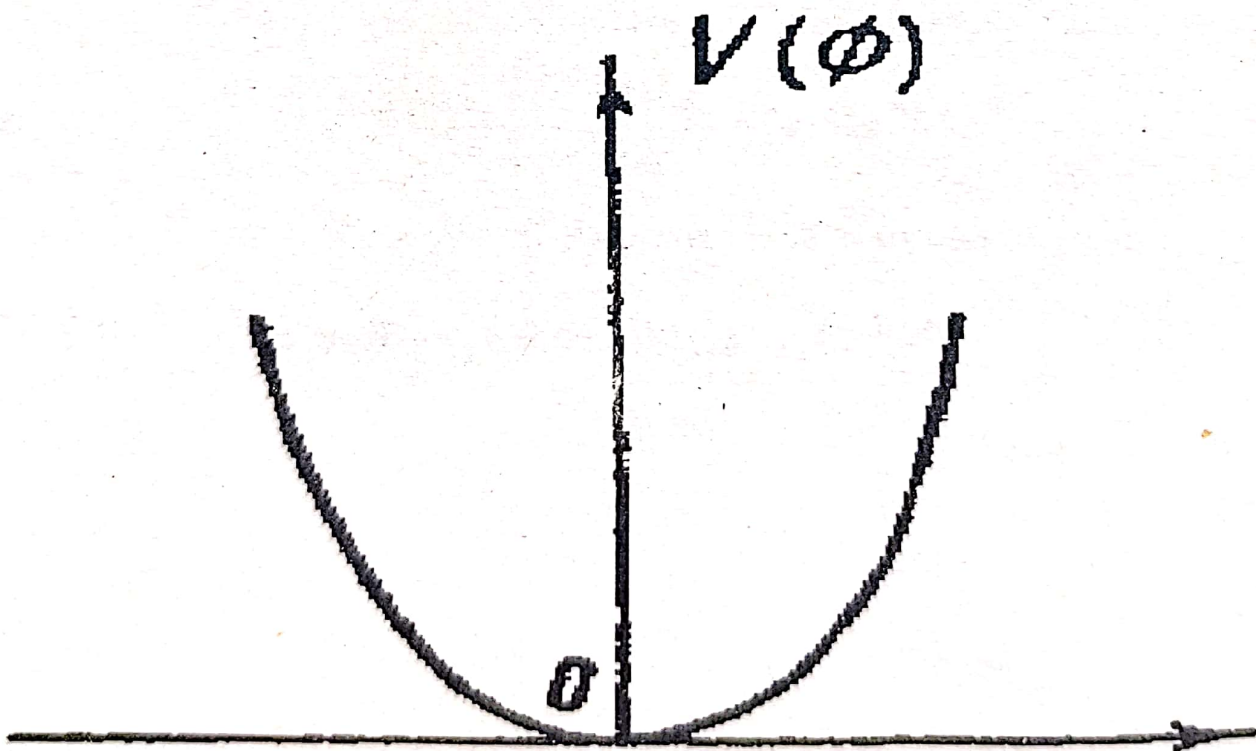


Fig. 1

Graficul de mai sus corespunde cazului în care supersimetria este ruptă spontan dar simetria internă este exactă:

În cazul cînd atît supersimetria cît și simetria internă sînt rupte spontan, graficul arată astfel:

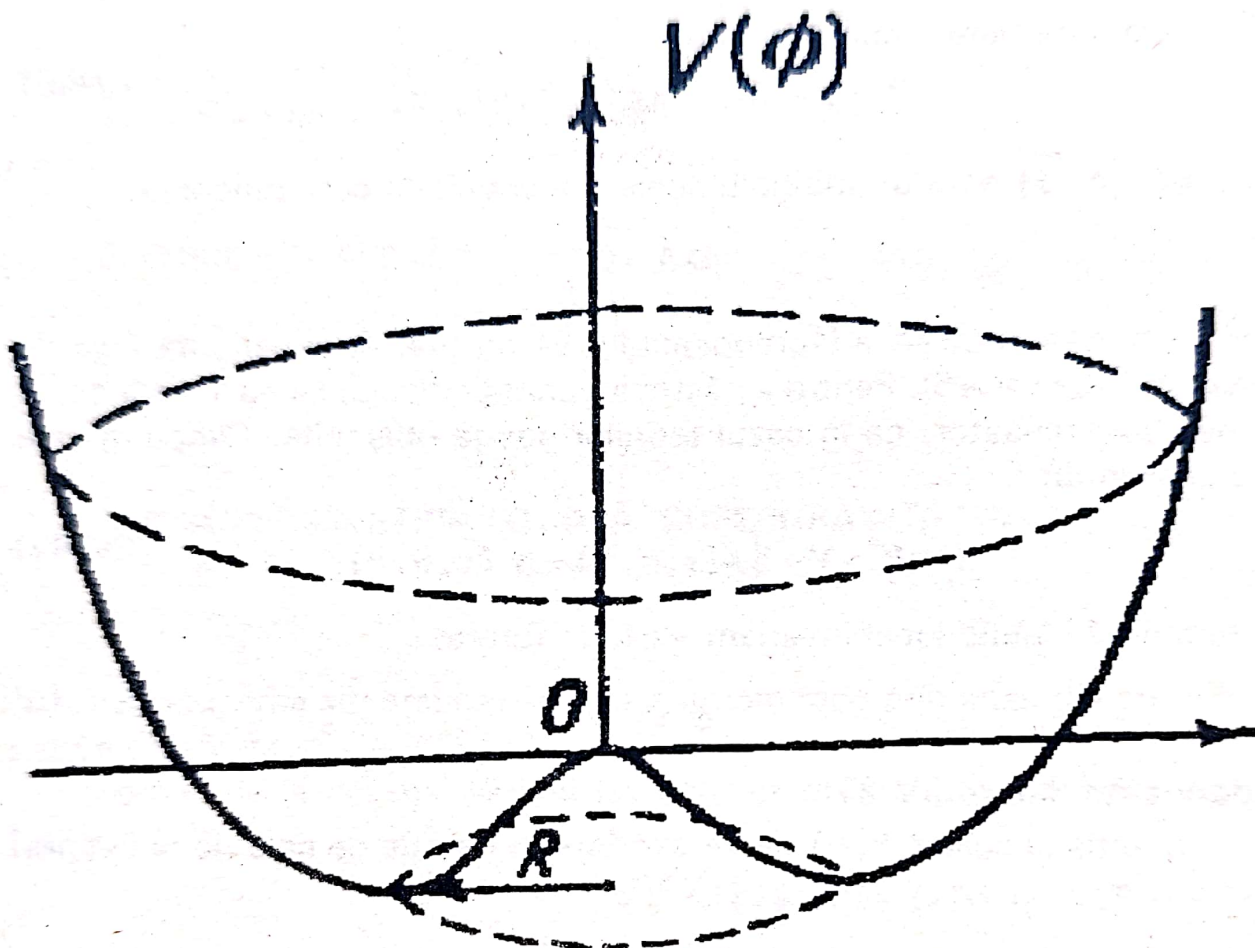


Fig. 2

Teorema Goldstone implică existența unui fermion fără masă: goldstino. Formulele (IV.6) scrise pentru supercîmpul chiral (IV.13) devin:

$$\delta A(x) = \sqrt{2} \alpha \psi(x)$$

$$\delta \psi(x) = \sqrt{2} \alpha F(x) + (\sigma^\mu \bar{\alpha}) \frac{i}{2} \partial_\mu A(x) \quad (\text{IV.45})$$

$$\delta F(x) = -\frac{i}{2} \partial_\mu \psi(x) \psi^\mu \bar{\alpha}$$

Pentru $A(x) = 0$ un cîmp auxiliar $F(x)$ diferit de zero duce la apariția unui cîmp spinorial.

IV.5 TEORII GAUGE SUPERSIMETRICE (A.Dariescu)

Partea cinetică din lagrangeanul (IV.34) este global invariantă față de grupul $U(1)$.

O transformare locală a supercîmpului:

$$\phi \rightarrow \phi' = \exp(-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})q)\phi \quad (\text{IV.46})$$

unde $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$ este un multiplu scalar ce satisface constrîngerea:

$$D\Lambda = 0$$

face ca partea cinetică a lagrangeanului să nu mai fie invariantă față de transformarea (IV.46). Pentru a păstra invarianța locală, se va introduce un termen compensator, ca în cazul teoriilor gauge obișnuite. Cîmpul gauge se transformă:

$$V \rightarrow V' = V + i[\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) - \Lambda^*(x, \theta, \bar{\theta})] \quad (\text{IV.47})$$

iar termenul cinetic local invariant va fi de forma:

$$\phi^\dagger e^{qV} \phi \quad (\text{IV.48})$$

unde V este dat de (IV.21).

Potențialul scalar $V(\phi)$ se va exprima în funcție de cele două cîmpuri auxiliare $F(x)$ și $D(x)$ astfel [11]:

$$V(\phi) = \sum_i |F_i|^2 + \frac{1}{2} |D|^2 \quad (\text{IV.49})$$

Pentru ruperea spontană a supersimetriei trebuie să avem sau $\langle 0 | F_i | \rangle \neq 0$: „F breaking” sau $\langle 0 | D | 0 \rangle \neq 0$: „D breaking” sau ambele. Dacă avem „F breaking” vom obține un fermion, iar pentru „D breaking” vom obține un „gaugino”. În oricare din cele două cazuri va apare un goldstino fără masă. Aceste particole care apar nu ne convin. Dacă avem supergravitația $N=1$, există un mecanism Higgs prin care acest goldstino este înghițit de un spin $3/4$ gravitino (partenerul supersimetric al gravitonului) care capătă masă.

Există o cale de rupere a supersimetriei explicit dar „softly”. Aceasta se face prin adăugarea la lagrangean a unor termeni non-supersimetrici care nu introduc divergențe pătratice.

Acești termeni sînt de tipul:

1. termeni scalari de masă:

$$m^2 \phi^* \phi$$

$$m^2 (\phi^2 + h.c.)$$

unde ϕ este un cîmp scalar,

2. termeni de masă pentru gaugino:

$$M(\lambda \lambda) + h.c.$$

3. termeni de cuplaj

$$g \phi^3 + h.c.$$

IV.6 SUPERSIMETRIA LOCALĂ: SUPERGRAVITAȚIA

(A.Dariescu, C.Dariescu)

Introducerea supersimetriei locale o vom face prin analogie cu teoriile gauge obișnuite.

Pornim de la cel mai simplu lagrangean scris pentru un boson și un fermion [5]:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi \quad (\text{IV.50})$$

Fie $E(x)$ parametrul infinitesimal dependent de coordonate. Dacă ϕ și ψ sînt componentele unui cîmp chiral left-handed, ele se transformă după formulele (IV.45) pe care le scriem incluzînd pe $\sqrt{2}$ în cîmpul scalar și fără cîmpul auxiliar $F(x)$:

$$\delta \phi = E(x) \psi \quad (\text{IV.51})$$

$$\delta \psi = i \not{\partial} \phi \bar{E}(x)$$

Variația $\delta \mathcal{L}$ a lagrangeanului conține termenul suplimentar $-\bar{\psi} \gamma^\mu \not{\partial} \phi \partial_\mu \bar{E}(x)$ care trebuie anulat.

În teoriile gauge obișnuite, se adaugă niște cîmpuri compensatoare pentru a anula acești termeni și se înlocuiește derivata obișnuită cu derivata covariantă. Facem o analogie cu teoriile gauge obișnuite [5]:

gauge

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)} \psi$$

termenul suplimentar:

$$-\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi \partial^{\mu} \alpha(x)$$

Pentru anularea termenilor suplimentari se va adăuga:

$$\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi \partial A^{\mu}(x)$$

$A^{\mu}(x)$ este bosonul gauge

$$\delta A^{\mu}(x) = \partial^{\mu} \alpha(x)$$

susy

$$E(x)$$

termenul suplimentar:

$$-\bar{\psi} \gamma_{\mu} \not{\partial} \varphi \partial^{\mu} E(x)$$

$$k \bar{\psi} \gamma_{\mu} \not{\partial} \varphi \psi^{\mu}$$

ψ_{μ} este gravitino

$$\delta \psi_{\mu} = \frac{\partial_{\mu} E(x)}{k}$$

În urma ruperii spontane a simetriei locale:

Cîmpul gauge fără masă
helicitate = 1

Înghite bosonul Goldstone
helicitate = 0

Se obțin două stări de elicitate

Este necesar un vector masiv: W_{μ}

$$m_W = gV$$

$$\text{unde } \langle 0 | H | 0 \rangle > 0$$

Gravitino fără masă
helicitate = 1/2

Înghite fermionul Goldstone
helicitate = 1/2

Se obțin patru stări de elicitate

Este necesar un cîmp masiv cu
spinul 3/2

$$m_{\frac{3}{2}} = k f_{\lambda}^2$$

$$\text{unde } \langle \lambda | Q^+ | 0 \rangle f = f_{\lambda}^2$$

Observație: $m_{\frac{3}{2}}$ este diferită de masa gravitonului.

Pentru a cupla supergravitația la materie, se generalizează superpo-
tențialul $W(\phi)$ la o funcție hermitică $G(\varphi, \varphi^*)$ numită: "Potențial Kähler".

Cu ajutorul acestei funcții, se va construi atît termenul cinetic din
lagrangean:

$$\mathcal{L}_{ctn} = G_i^j \partial^\mu \varphi_j^* \partial_\mu \varphi^i$$

$$G_i^j = \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^i \partial \varphi_j^*} \quad (\text{IV.52})$$

cît și potențialul scalar efectiv:

$$V = e^G [G_i (G'')^{-1j} G^j - 3] \quad (\text{IV.53})$$

Prezența termenului negativ ne arată posibilitatea ruperii supersimetriei la $V=0$. Probleme ne crează valorile negative ale acestui potențial.

Se redefinește cu ajutorul lui G fermionul Goldstone:

$$\chi = G_i \psi^i$$

iar masa gravitinului va fi:

$$m_{\frac{3}{2}} = e^{\frac{G}{2}}$$

Cel mai simplu exemplu pe care îl putem considera este cazul unui singur câmp scalar $i=1$ [5,6]:

$$V = e^{\frac{G}{2}} (G_z (G_z^z)^{-1} G_z^* - 3) = 9e^{\frac{4G}{3}} \frac{1}{G_z^z} \left(\partial_z \partial_{z^*} e^{-\frac{G}{3}} \right)$$

Se observă că anularea potențialului V implică:

$$G = -3 \ln [f(z) + f^*(z^*)]$$

care, în cel mai simplu caz, ne dă:

$$G = -3 \ln (z + z^*)$$

Exemplul anterior se poate generaliza la mai multe câmpuri:

$$G = -3 \ln (z + z^* + g(\varphi^i, \varphi_i^*))$$

În cazul cel mai simplu:

$$g = -\varphi_i \varphi_i^*$$

Prin schimbări de variabilă adecvate, se poate obține un potențial de forma:

$$G = -3 \ln \left(1 - \frac{1}{3} z^I z_I^* \right) + \ln |W|^2, \quad I = 0 \dots N$$

care elimină neajunsurile de care aminteam la început.

Lagrangianul supergravitației $N = 1$ este complet determinat de următoarele funcții:

$$(*) \quad G(\varphi^i, \varphi_i^*) = J(\varphi_i, \varphi_i^*) + \log |W(\varphi^i)|^2$$

+ termenii cinetici.

$J(\varphi^i, \varphi_i^*)$ este potențialul Kahler real

$\ln |W|^2$ corespunde superpotențialului din teoria globală. Termenii gauge cinetici care includ derivatele covariante și câmpurile gauge pot avea următoarele expresii:

$$-\frac{1}{4} R_{\epsilon} f_{\alpha\beta} F_{\mu\gamma}^{\alpha} F^{\mu\gamma\beta}$$

$$-\frac{1}{2} R_{\epsilon} f_{\alpha\beta} \bar{\lambda}^{\alpha} \mathcal{D} \lambda^{\beta}$$

$$-G_j^i (D^{\mu} \varphi)^* (D_{\mu} \varphi)^j$$

$$-G_j^i \bar{\chi}_{Li} \mathcal{D} \chi_R^j + h.c.$$

$$e^{\frac{G}{2}} \bar{\Psi}_{\mu R} \sigma^{\mu\gamma} \Psi_{\gamma R} + h.c.$$

$$\frac{1}{4} e^{\frac{G}{2}} (G_i G^{-1i}{}_k f_{\alpha\beta}^{*k} \bar{\lambda}_R^{\alpha} \lambda_R^{\beta} + h.c.)$$

unde cu Ψ_{μ} am notat gravitino.

Potențialul scalar

$$V = e^G (G_i G_j^{-1i} G^j_{-3}) + \frac{1}{2} (Ref)_{\alpha\beta}^{-1} (G_i T_j^{\alpha i} \varphi^j) (G_k T^{\beta k} e \varphi^{\epsilon})$$

face posibilă ruperea supersimetriei la $V = 0$

Acum, ținând seama de lagrangeanul clasic al câmpului gravitațional, de lagrangeanul de spin 3/2, lagrangeanul efectiv al supergravitației va

cuprinde atât lagrangianul graviton-gravitino:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{e^2}{2k^2} R - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\alpha \Psi_\beta - m_g \bar{\Psi}_\mu \sigma^{\mu\nu} \Psi_\nu \quad (\text{IV.54})$$

unde:

$$m_g^2 = m_{\frac{3}{2}}^2 = k^{-2} e^{-G} \quad (\text{IV.55})$$

cît și lagrangeanului cinetic $f(\Phi, \Phi^*)$ grefat cu superpotențialul $W(\Phi)$. Acest superpotențial va fi sau nu va fi cu rupere spontană de simetrie.

BIBLIOGRAFIE

1. Pati J.C., *Summer School In High Energy Physics and Cosmology*, I.C.T.P., Italy *Beyond the Standard Model*.
2. Pati J.C., *Summer School In High Energy Physics and Cosmology*, I.C.T.P., Italy *Supersymmetry and compositeness*.
3. Babu K.S., Pati J.C., *Phys. Lett. B*, vol.256, No.2, 1991.
4. Babu K.S., Pati J.C., Stremnitzer H., *Fermion masses and CP violation in a model with scale unification*, UMD-PP91-199.
5. Ellis J., *Summer School ...*, I.C.T.P., Trieste, Italy, *Model Building with supersymmetry*, 1991.
6. Ellis J., *Summer School ...*, I.C.T.P., Trieste, Italy, *Introduction to Supergravity and Superstrings*, 1991.
7. Ellis J., *Summer School ...*, I.C.T.P., Trieste, Italy, *Introduction to Supergravity-Motivations*, 1991.
8. Ellis J., *Summer School ...*, I.C.T.P., Trieste, Italy, *Unstable cosmological relics*, 1991.
9. Ellis J., *Summer School ...*, I.C.T.P., Trieste, Italy, *Stable supersymmetric dark matter*, 1991.
10. Zwirner F., *Summer School ...*, I.C.T.P., Trieste, Italy, *Phenomenological supersymmetry*, 1991.
11. Ibanez L.E., CERN-TH. 5237/88, *Grand unification, supersymmetry superstrings*.
12. Mohapatra R.N., *Unification and Supersymmetry*, Springer-Verlag, 1986.

V. STRINGS ȘI SUPERSTRINGS

(M. Pîso)

V.1 GENERALITĂȚI

Fizica actuală este construită la nivel fundamental pe conceptele teoriei relativității și teoriei cuantice, principii neschimbate de la începutul secolului. Aceste teorii conțin conceptul de punct: particula este punct material, sarcinile sînt punctiforme, traiectoriile (cînd există) sînt drumuri pe o varietate netedă. Electrodinamica cuantică, cromodinamică, relativitatea generală, pornind și de la aceste premise, asigură modelarea matematică și predicția cu suficientă rigurozitate a majorității fenomenelor fizice.

Conceptul de unitate a Universului conduce evident la ideea existenței unei singure teorii care să permită descrierea unitară a regulilor care guvernează fenomenele fizice. Clasele laice de interacțiuni (tare, electromagnetică, slabă și gravitațională) au fost restrînse prin descrierea unitară a interacțiunilor electromagnetice și slabe (electroslabe), apoi electroslabe și tari (teoria GUT). Interacțiunea gravitațională a rămas, încă, în afara acestei scheme, toate încercările de unificare riguroasă cu alt cîmp dovedindu-se neeficiente pînă în prezent [1,2].

Din punct de vedere cuantic, se poate construi o teorie de cîmp consistentă numai pentru particule cu spin cel mult unitar: pentru spin mai mare, teoria devine nerenormalizabilă. Faptul nu este deranjant pentru interacțiunile interslabă și tare, în schimb nu se poate cuantifica gravitația. Teoria încă în vigoare astăzi în domeniu este relativitatea generală, o teorie de scară mare. Conform acesteia, prin linearizarea ecuațiilor de cîmp Einstein se obține radiația gravitațională [3,4]; mai precis, în cîmp slab ecuațiile admit o soluție de tip undă cu elicitatea $s = 2$. Prin extensie, se presupune că ipotetica particulă de schimb numită *graviton* are spinul 2 și masa nulă [4]. Însă, cu toate eforturile experimentale din ultimii 30 de ani, această radiație nu a fost încă pusă în evidență. Reamintim că relativitatea generală este o teorie clasică, în care există conceptele de punct material și traiectorie.

Fenomene interesante au apărut în deceniul 7, când electrodinamica cuantică a fost pusă în dificultatea de a modela fenomene observate în acceleratoarele de particule de mare energie [5]; au fost observate serii de rezonanțe hadronice de spin mare, pentru care s-a evidențiat experimental o dependență a masei de spin (moment cinetic): $M^2 = \alpha' J$. Explicații restrânse s-au dat în sensul parametrizării amplitudinilor de împrăștiere prin *formalismul Regge* [6], mai precis prin considerarea spațiu-timp drept o structură discretă. O explicație complementară a fost dată de Veneziano în 1968 [7]: amplitudinile de împrăștiere au fost calculate prin combinații de diagrame în care canalele s și t nu erau distinse. *Amplitudinea Veneziano* a condus la *modelele duale* care au generat (începînd cu 1974) [8] teoriile fizice ale obiectelor extinse (strings).

În esență, obiectele extinse sînt entități care generalizează conceptul de particulă: particula nu mai este descrisă ca punct material, ci printr-un obiect geometric de dimensiune $d \geq 1$ (fig.1):

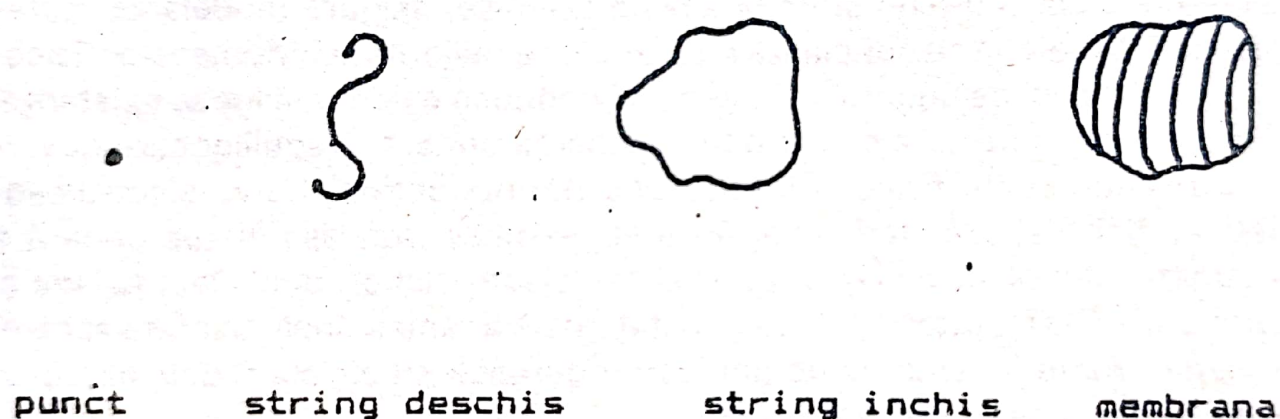


Fig. 1 Exemple de obiecte extinse

Ulterior s-a găsit o astfel de dependență și pentru sistemele astrofizice, ceea ce este remarcabil. Această generalizare, aparent greu de justificat, ne este sugerată de multe fapte experimentale. De asemenea, la prima vedere, matematica necesară descrierii dinamicii sistemelor de astfel de obiecte este complicată și greu de manipulat.

Teoria obiectelor extinse devine însă clară și elegantă atunci când este privită prin aparatul topologiei algebrice și geometriei algebrice. Este remarcabil faptul că Dieudonné [9], referindu-se la legătura acestor formalisme puternice cu științele naturii, afirma: „Il n'y en a pas pour le moment”.

V.2 STRINGURI CLASICE

În cele ce urmează, noțiunea de clasic are două semnificații, care vor rezulta din context: non-cuantic și non-string (după Yu. Manin [10] „... clasic pentru fizica actuală înseamnă aproximativ un an și ceva în urmă ...”).

Pentru a avea o intuiție asupra unui string de dimensiune 1, să ne imaginăm o buclă închisă sau un fir, din punct de vedere mecanic inextensibil și perfect flexibil, de grosime zero și cu densitatea lineară de masă constantă. Acest model înlocuiește conceptul de punct material. Problema care se pune este, deci: în condiții inițiale date, să se descrie mișcarea liberă a acestui string într-un spațiu plat (Minkowski).

Prima remarcă este următoarea: un punct material în mișcare liberă descrie o linie de univers; un string va descrie în spațiu-timp o suprafață (fig.2), denumită *suprafață de univers*, în terminologia uzuală *world sheet*.

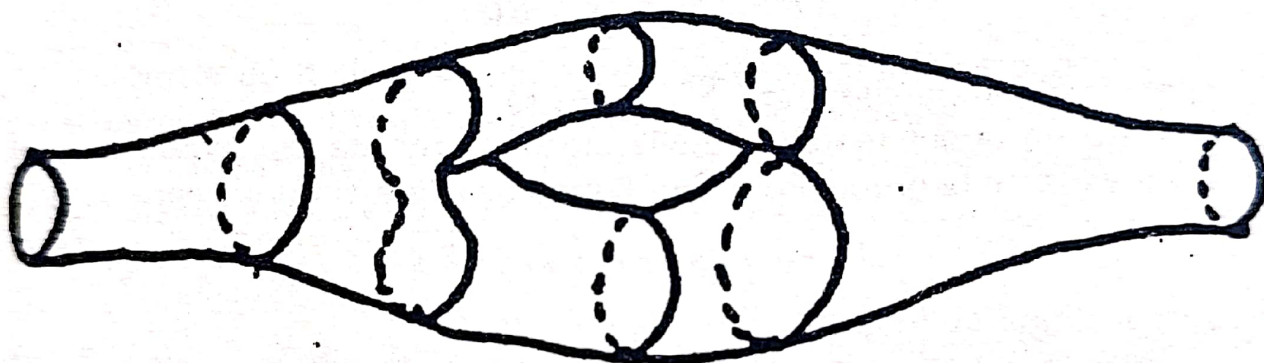


Fig. 2 Exemple de world-sheet

Topologia acestei suprafețe poate deveni complicată, datorită faptului că stringul se poate roti, deforma, răsuca, diviza, poate să vibreze (fig.3)

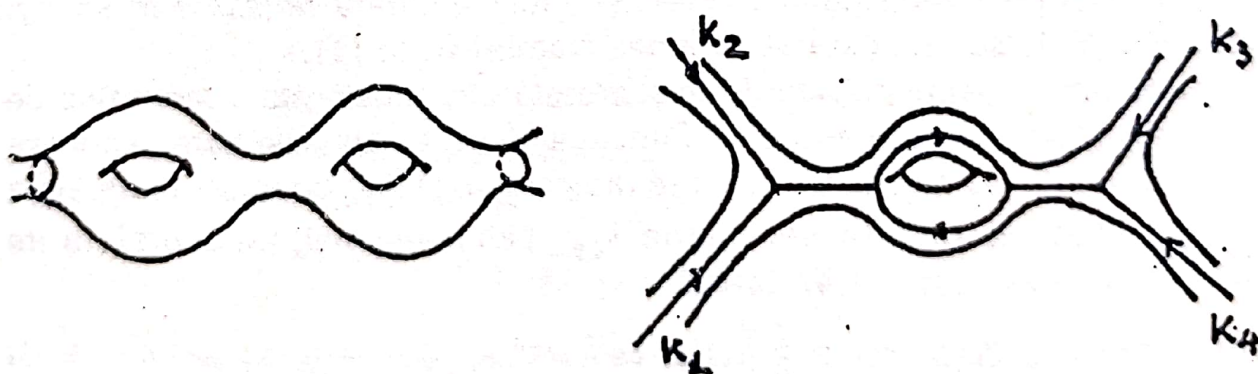


Fig. 3 Suprafețe descrise de stringuri clasice

Este evident că descrierea unei astfel de suprafețe se poate face clasic numai pentru câteva cazuri triviale, cu simetrii. De aceea, se evită

abordarea problemei în spațiu 3 + 1 dimensional și se consideră direct cazul Minkowski, în care problema dinamică se tratează variațional.

Se consideră stringul închis. Orice string clasic închis este topologic un cerc (S^1). În acest caz, suprafața Σ descrisă în spațiu-timp se parametrizează printr-un parametru de evoluție τ , considerat ca o coordonată de tip temporal pentru un observator aflat în punctul ϑ , care este al doilea parametru, de tip spațial, care descrie stringul. Parametri (ϑ, τ) parcurg banda $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

În spațiul de tip Minkowski de dimensiune D cu metrica lorentziană, punctele suprafeței au coordonatele:

$$X(\vartheta, \tau) = (x_i(\vartheta, \tau)) \quad , \quad 0 \leq i \leq D-1 \quad (V.1)$$

Se consideră vectorii:

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau} = \partial_\tau X \quad ; \quad X' = \frac{\partial X}{\partial \vartheta} = \partial_\vartheta X \quad (V.2)$$

din spațiul tangent la suprafața Σ în (ϑ, τ) .

Pentru un punct material, legile dinamice rezultă din expresia unei acțiuni invariante la grupul Poincaré. Forma uzuală a acțiunii libere este:

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}\dot{X}} \quad (V.3)$$

proporționalitate cu lungimea liniei de univers.

Pentru string se poate lua o acțiune *bidimensională*, proporțională cu aria suprafeței de univers:

$$S = -T \int d\vartheta d\tau \sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X}\dot{X})(X'X')} \quad (V.4)$$

Constanta T este dimensională și este denumită *tensiune în string*. Acțiunea (V.4) se numește și acțiunea Nambu-Goto [1].

Soluțiile ecuației clasice de mișcare sînt, în acest caz, suprafețele de univers a căror arie este extremă. Pentru a efectua calculele este neconvenabilă forma (V.4) a acțiunii, datorită radicalului. Dificultatea se poate evita prin introducerea unui tensor metric $h_{\alpha\beta}$, bidimensional, pe suprafața de univers. În acest caz, (V.4) devine:

$$S(h, X) = -\frac{T}{2} \int d\vartheta d\tau \sqrt{h} H^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \quad (V.5)$$

Aici, h este modulul determinantului matricii $h_{\alpha\beta}$, iar $\eta_{\mu\nu}$ este tensorul metric Minkowski D dimensional; $\alpha, \beta = 0, 1$ ei $\mu, \nu = 0, 3$.

Înainte de a ajunge la ecuațiile de mișcare, să studiem comportarea acțiunii (V.5) la grupurile de invarianță dinamică uzuale. Se constată invarianța la următoarele grupuri de transformare:

1. *Deplasările în spațiu-timp euclidian.* Dacă L este un element al grupului $\mathbb{R}^D \otimes 0(D)$ - produsul semidirect al translațiilor și rotațiilor în $\mathbb{R}^D$, atunci:

$$S(h, X) = S(h, LX) \quad (V.6)$$

echivalent cu invarianța Poincaré pentru acțiunea unidimensională (V.3).

2. *Reparametrizarea.* Pentru orice difeomorfism f al suprafeței Σ :

$$S(h, X) = S(fh, f^*X) \quad (V.7)$$

3. *Grupul conform.* Pentru orice $\varphi \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$:

$$S(h, X) = S(e^\varphi h, X) \quad (V.8)$$

Primele două tipuri de invarianță sînt caracteristice și acțiunii unidimensionale (V.3). Invarianța conformă este însă un element nou. Pentru o scurtă explicație, este evident că se poate alege oricînd o parametrizare a suprafeței de univers de asemenea manieră încît:

$$h_{\alpha\beta} = e^\varphi \eta_{\alpha\beta} \quad (V.9)$$

unde $\eta_{\alpha\beta}$ este metrica Minkowski bidimensională. Efectuînd transformarea (V.9) în (V.5), se constată că e^φ dispare, deoarece $\sqrt{h} = e^\varphi$ și $h^{\alpha\beta} = e^{-\varphi}$. În acest caz, (V.5) devine:

$$S = -\frac{T}{2} \int d\theta d\tau \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \quad (V.10)$$

Această acțiune caracterizează, deci, un string clasic închis în spațiul Minkowski de metrica $\eta_{\mu\nu}$. Ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange sînt, în mod evident, ecuațiile unei plane:

$$\square X^\mu \equiv (\partial_\theta \partial_\theta - \partial_\tau \partial_\tau) x^\mu = 0 \quad (V.11)$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații pot fi scrise ca o sumă între o funcție de tip „retardat” și una de tip „avansat”:

$$X^\mu(\theta, \tau) = X_R^\mu(\theta^-) + X_L^\mu(\theta^+) \quad (V.12)$$

unde:

$$\partial^- = \tau - \partial \quad \text{și} \quad \partial^+ = \tau + \partial \quad (\text{V.13})$$

Datorită compactității domeniului de integrare, descompunerea (V.12) trebuie înțeleasă astfel: mișcările stringului, adică deformările cercului, sînt compuse din moduri de mișcare la dreapta x_R^μ (right movers) și moduri de mișcare la stînga x_L^μ (left movers). Transformările (V.13) pot fi privite și drept coordonate light-cone.

Se pot defini în mod analog și derivatele:

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\partial) \quad (\text{V.14})$$

De asemenea, și metrica Minkowski bidimensională:

$$\begin{aligned} \eta_{+-} = \eta_{-+} &= -\frac{1}{2} \\ \eta_{++} = \eta_{--} &= 0 \\ \eta^{+-} = \eta^{-+} &= -2 \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Prin derivarea variațională a acțiunii referitor la metrica bidimensională se obține tensorul energie-impuls:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T}(\sqrt{h})^{-1} \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} \quad (\text{V.16})$$

În coordonatele light-cone, singurele componente nenule sînt:

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \partial_+ X \quad (\text{V.17})$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \partial_- X$$

Din $\frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0$ și din (V.17) rezultă:

$$T_{++} = T_{--} = 0 \quad (\text{V.18})$$

sau

$$\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0 \quad (\text{V.19})$$

Conservarea energiei și a impulsului implică anularea divergenței tensorului energie-impuls. Datorită invarianței conforme a acțiunii, această

divergență se reduce la:

$$\partial_- T_{++} = 0 \quad (V.20)$$

Acest rezultat este important, deoarece pentru T_{++} se poate alege orice funcție f cu proprietatea ca $\partial_- f = 0$, ceea ce implică existența unui număr infinit de legi de conservare; această proprietate a teoriei este datorată caracterului distins al grupului conform bidimensional.

Pentru explicitarea (V.12), este necesară stabilirea condițiilor de frontieră. Pentru stringul închis, acestea sînt date de periodicitatea coordonatelor:

$$X^\mu(\tau, \vartheta) = X^\mu(\tau, \vartheta + \pi) \quad (V.21)$$

Soluția (V.12) se va scrie sub forma unei serii:

$$X_R^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} e^2 p^\mu (\vartheta^-) + \frac{i}{2} e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in\vartheta^-} \quad (V.22)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} e^2 p^\mu (\vartheta^+) + \frac{i}{2} e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in\vartheta^+} \quad (V.23)$$

unde $e = (\pi T)^{-\frac{1}{2}}$, α_n^μ sînt amplitudinile Fourier, x^μ și p^μ sînt coordonatele centrului de masă și impulsul stringului. Deoarece X_R^μ și X_L^μ trebuie să fie funcții reale, α_n^μ și $\bar{\alpha}_{-n}^\mu$ sînt adjuncate:

$$(\alpha_n^\mu)^+ = \alpha_{-n}^\mu ; \quad (\bar{\alpha}_{-n}^\mu)^+ = \alpha_n^\mu \quad (V.24)$$

Pentru a stabili algebra pe care o formează componentele Fourier, se calculează parantezele Poisson pentru X^μ și X^ν la τ egal și se extrag de aici parantezele Poisson pentru α_m^μ și $\bar{\alpha}_n^\nu$:

$$\begin{aligned} \{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} &= \{\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\} = i m \delta_{m+n} \eta^{\mu\nu} \\ \{\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\} &= 0 \end{aligned} \quad (V.25)$$

unde $\delta_k = 1$ pentru $k = 0$ și $\delta_k = 0$ pentru $k \neq 0$.

În mod asemănător, se arată că p^μ și X^ν sînt variabile conjugate canonic:

$$\{p^\mu, X^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \quad (V.26)$$

Din relațiile (V.23-V.26) se calculează componentele Fourier L_m și $\bar{L}_m$ ale tensorului energie-impuls pentru $\tau = 0$:

$$L_m = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{-2im\vartheta} T_{--} d\vartheta = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \alpha_n \quad (V.27)$$

$$\bar{L}_m = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\vartheta} T_{++} d\vartheta = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{m-n} \bar{\alpha}_n$$

Din (V.23), (V.24), (V.27) se poate calcula masa stringului în funcție de modurile interne de oscilație:

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = \pi T \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \bar{\alpha}_n) \quad (V.28)$$

Această relație este deosebit de importantă, deoarece faptul experimental care a condus la dezvoltarea teoriei este proporționalitatea dintre pătratul masei și spinul rezonanțelor hadronice. Factorul de proporționalitate se notează uzual cu α' și este cunoscut sub numele de *panta Regge* [11]; se definește ca fiind maximul posibil al spinului (moment cinetic) raportat la pătratul masei (energie). Pentru un string clasic, $\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$. De aici, rezultă pentru tensiunea în string T :

$$T = \frac{1}{2\pi \alpha'} \quad (V.29)$$

motiv pentru care a fost ales acest factor de proporționalitate în acțiunea Nambu-Goto (V.4).

Un rezultat interesant apare prin calcularea parantezei Poisson pentru componentele Fourier ale tensorului energie-impuls L_m . Din (V.27) rezultă:

$$\{L_m, L_n\} = \frac{1}{4} \sum_{k,1} \{\alpha_{m-k} \alpha_k, \alpha_{n-1} \alpha_1\} \quad (V.30)$$

Utilizând identitatea:

$$\{AB, CD\} = A\{B, C\}D + AC\{B, D\} + \{A, C\}DB + C\{A, D\}B$$

și relațiile (V.25), (V.30) se obține:

$$\{L_m, L_n\} = \frac{i}{2} \sum k \alpha_{m-k} \alpha_{k+n} + \frac{i}{2} \sum (m-k) \alpha_{m-k+n} \alpha_k \quad (V.31)$$

Efectuînd schimbarea de indice $k \rightarrow k+n$ în prima sumă, se obține relația:

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n} \quad (V.32)$$

care conține fundamentul teoriei algebrice a stringurilor. Algebra definită prin paranteza Poisson este *algebra Virasora*, izomorfă cu algebra difeomorfismelor infinitezimale ale lui S^1 [12].

V.3 CUANTIFICAREA STRINGULUI CLASIC. STRINGUL BOSONIC

Se consideră rezultatele din prima parte pentru stringul clasic și se derivă teoria cuantică prin cuantificarea canonică. În mod elementar, această procedură constă în înlocuirea parantezelor Poisson cu comutatori:

$$\{A, B\} \rightarrow -i[A, B] \quad (V.33)$$

ceea ce ar trebui să conducă la o teorie cuantică pentru stringul bosonic. În acest caz, se reevaluează relațiile (V.25) și (V.26) și se obține:

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= m \delta_{m+n} \eta^{\mu\nu} \\ [\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (V.34)$$

$$[\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m \delta_{m+n} \eta^{\mu\nu}$$

Formal, se poate spune că α_m^μ sînt operatori de creație și de anihilare pentru oscilatorul armonic, cu condiția de normare obișnuită, de aceea vor fi notați cu a_m^μ . Apare însă o deosebire importantă față de teoria cuantică uzuală: calculînd relația de comutare între componentele temporale a^0 și a_m^{0+} , se obține o valoare negativă:

$$[a_m^0, a_m^{0+}] = -1 \quad (V.35)$$

ceea ce implică faptul că o stare de forma $a_m^{0+}|0\rangle$ va avea norma negativă:

$$\langle 0 | a_m^0 a_m^{0+} | 0 \rangle = -1 \quad (V.36)$$

În acest caz, spațiul Fock obținut prin aplicarea operatorilor de creație asupra stării de vid $|0\rangle$ nu admite o normă pozitivă definită. Pentru obținerea unei teorii cauzale, este necesară utilizarea unui subspațiu Fock în care să nu existe stări cu norma negativă (ghosturi).

Pentru a încerca salvarea cauzalității, se definesc operatorii modurilor Fourier prin similitudine cu cei clasici (V.27):

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} a_{m-n} a_n \quad (\text{V.37})$$

cu o condiție suplimentară, și anume ordonarea temporală pentru a_m . Deoarece a_{m-n} comută cu a_n peste tot, cu excepția lui $m=0$, operatorul L_0 se definește astfel:

$$L_0 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} a_n \quad (\text{V.38})$$

unde a_n sînt ordonați normali. Clasic, L_0 se anulează, rezultînd relația (V.28) pentru masă. Cuantic, aceasta înseamnă că L_0 anulează orice stare. Datorită ambiguității de ordonare temporală [11], se adaugă în teorie o constantă a , astfel încît:

$$(L_0 - a) | \Phi \rangle = 0 \quad ; \quad (\bar{L}_0 - a) | \Phi \rangle = 0 \quad (\text{V.39})$$

În acest caz, formula masei pentru stringul bosonic închis devine:

$$M^2 = -8a + 8 \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} a_n = -8a + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{-n} \bar{a}_n \quad (\text{V.40})$$

ceea ce implică egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{-n} \bar{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} a_n \quad (\text{V.41})$$

constrîngere care cuplează modurile dreapta cu modurile stînga.

Subspațiul Fock al stărilor cu norma pozitivă corespunde subspațiului în care sînt satisfăcute condițiile:

$$(L_m - a \delta_m) | \Phi \rangle = 0, \quad m \geq 0 \quad (\text{V.42})$$

Pentru a studia algebra formată de operatorii componente Fourier ale tensorului energie-impuls, se calculează relațiile, prin analogie cu cazul clasic. Relația clasică poate fi acceptată și pentru cazul cuantic, cu excepția faptului că pentru $m+n=0$, sumele din (V.32) vor fi modificate

de ordonarea temporală, fapt care nu permite efectuarea transformării $k \rightarrow k + n$. Deoarece orice ambiguitate în ordonarea temporală se manifestă prin apariția unui termen aditiv complex, se adaugă la relația (V.33) un termen $A(m)$, o funcție complexă de m :

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n} \quad (V.43)$$

Algebra astfel obținută este o algebră Kac-Moody, în cazul de față o extensie a algebrei Virasoro [11], $A(m)$ fiind sarcina centrală a algebrei, cu condiția $A(m) = -A(-m)$, $A(m) = 0$.

Conform [11], calculul sarcinii centrale $A(m)$ se efectuează prin ordonarea temporală a sumelor (V.32), în modul următor: din identitatea Jacobi pentru operatorii L_k, L_m, L_n , în cazul $k + m + n = 0$ rezultă:

$$(n - m) A(k) + (m - k) A(n) + (k - n) A(m) = 0 \quad (V.44)$$

Pentru $k = 1$, rezultă:

$$A(n + 1) = \frac{(n + 2) A(n) - (2n + 1) A(1)}{(n - 1)} \quad (V.45)$$

prin recurență, se obține soluția:

$$A(m) = c_3 m^3 + c_1 m \quad (V.46)$$

Calculînd comutatorul $[L_m, L_n]$, se obține:

$$\langle 0; 0 | [L_1, L_{-1}] | 0; 0 \rangle = 0 \quad (V.47)$$

$$\langle 0; 0 | [L_2, L_{-2}] | 0; 0 \rangle = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} D$$

unde D este dimensiunea spațiului Minkowski în care se deplasează stringul bosonic închis.

Din (V.46) și (V.47) se obține comutatorul:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n} \quad (V.48)$$

Un rezultat interesant se obține prin calcularea comutatorului componentelor energie-impuls la τ egal. Existența unei infinități de legi de conservare implică că orice stare fizică trebuie să fie anulată de operatorul

energie-impuls $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} | \Phi \geq 0 \quad (V.49)$$

Atunci, comutatorul singurei componente nenule a lui $T_{\alpha\beta}$, adică T_{++} , este:

$$[T_{++}(\sigma), T_{++}(\sigma')] = i(T_{++}(\sigma) + T_{++}(\sigma')) \delta(\sigma - \sigma') - \frac{i}{24} (D - 26) \delta'''(\sigma - \sigma') \quad (V.50)$$

Se observă că termenul al doilea conține o anomalie care se anulează într-un spațiu cu $D = 26$ de dimensiuni, fapt crucial în teoriile de string bosonic.

În condițiile de mai sus ($D = 26$ și $\alpha = 1$), spectrul teoriei este generat de 24 de seturi de oscilatori, toate modurile fiind transversale. În funcție de momentul cinetic $J = \alpha' M^2$, se prezintă, după [11], spectrul pentru stringuri bosonice deschise:

$\alpha' M^2$	Stări cuantice
-1	stare fundamentală - tahion
0	boson fără masă cu 24 de polarizări transversale
1	324 stări
2	3200 stări
3	25.650 stări

.....

Spinul maxim pentru masa M este $s = \alpha' M^2 + 1$.

În cazul stringurilor bosonice închise, în formula masei apare un factor 4, adică $\alpha' M^2 = 4(N - 1)$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Spectrul se deduce din cel pentru stringuri deschise. Starea fundamentală este un tahion scalar cu masa $M^2 = -4$. Pentru $N = 1$, stările sînt de forma:

$$|\Omega^{ij}\rangle = \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^{-j} |0\rangle \quad (\text{V.51})$$

adică vectori cu masa zero construiți prin $SO(24)$, cu numere cuantice corespondente produsului tensorial dintre un vector cu masa nulă left-mover din $SO(24)$ cu un vector cu masa nulă right-mover din $SO(24)$. Termenul trasă $\delta_{ij} |\Omega^{ij}\rangle$ este un scalar fără masă, numit *dilaton*. În schimb, partea simetrică cu trasa nulă din $|\Omega^{ij}\rangle$ se transformă în $SO(24)$ ca o particulă cu masa de repaus nulă și spin 2 care, conform argumentației general relativiste, este un *graviton*.

Ca o concluzie la acest capitol, teoria cuantică a stringurilor libere are spectru fără ghosturi pentru dimensiunea spațiu-timpului mai mică sau egală cu 26 și verifică traiectoria Regge pentru $\alpha \leq 1$. În cazul critic $D = 26$ și $\alpha = 1$ particulele au numai polarizări transversale, existînd multe stări decuplate de normă zero. Stringurile închise sînt orientate și au moduri stînga și moduri dreapta; pe stringurile deschise există unde staționare. De o deosebită importanță sînt stringurile închise, datorită prezentei în spectru a unui graviton.

V.4 STRINGUL FERMIONIC. SUPERSTRINGS

Generalizarea teoriei obiectelor extinse 1-dimensionale și pentru stări fermionice se efectuează aparent simplu, prin impunerea unor supersimetrii pe suprafața de univers. În figura 4 se prezintă spectrul general al unei teorii superstrings, unde * reprezintă stări bosonice degenerate, iar x reprezintă stări fermionice degenerate. Panta naturală a diagonalelor principale este α' - panta Regge. Se observă că pentru $J = 1$, în spectru apare primul tahion.

Metoda de construcție a acțiunii pentru superstrings a fost inițiată de Ramond, Neveu și Schwartz (RNS) [13], cu corecțiile ulterioare efectuate de Gliozzi, Scherk și Olive (GSO) [14]. În esență, se construiesc fibrații spinoriali ai suprafeței de univers. Variabilele spinoriale sînt:

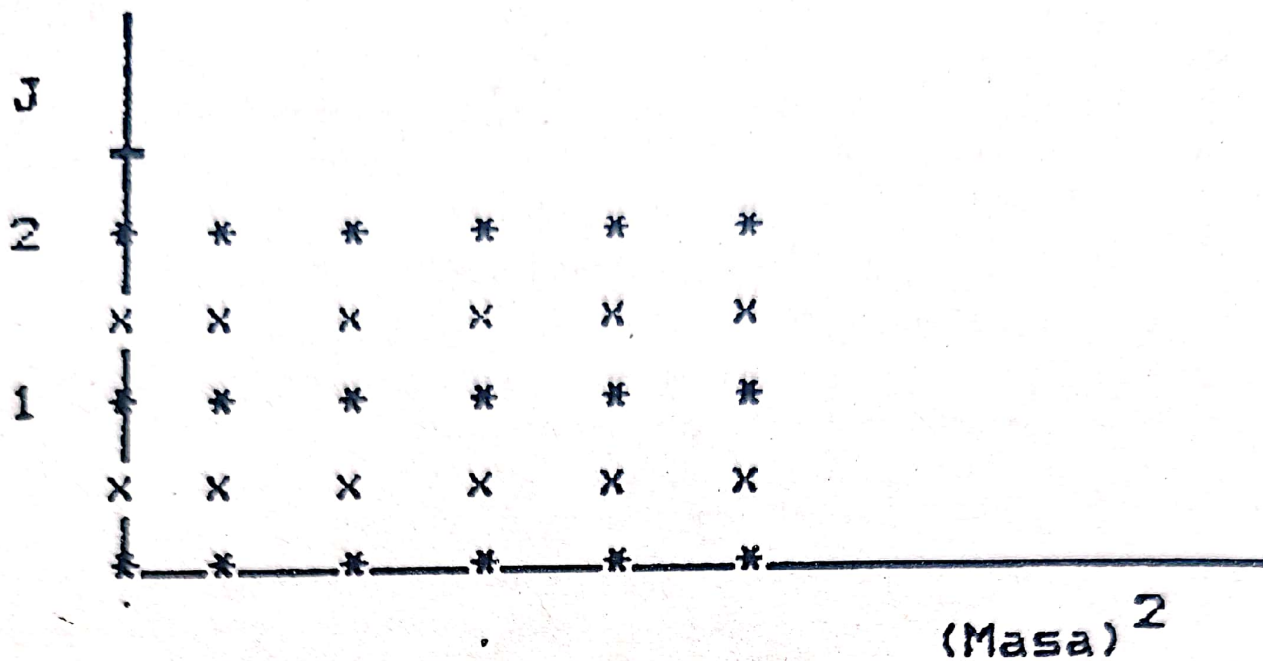


Fig. 4

$$\Psi^\mu(\vartheta, \tau) = \begin{pmatrix} \vartheta_-(\vartheta, \tau) \\ \vartheta_+(\vartheta, \tau) \end{pmatrix}$$

În acest caz, acțiunea pentru stringul fermionic devine [15]:

$$S = -\frac{T}{2} \int d\vartheta d\tau \left(\partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x^\nu - i \bar{\Psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \Psi_\mu \right) \quad (V.52)$$

unde ρ^α sînt matricile Dirac:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (V.53)$$

cu relația de anticomutare $\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\eta_{\alpha\beta}$; $\bar{\Psi} = \Psi \rho_0$

Prin variația acțiunii (V.52) se obțin ecuațiile de mișcare pentru stringuri închise bosonice și fermionice:

$$\partial_+ \Psi_-^\mu = \partial_+ (\partial_- X_R^\mu) = 0 \quad (V.54)$$

$$\partial_- \Psi_+^\mu = \partial_- (\partial_+ X_L^\mu) = 0$$

de unde rezultă faptul că modurile stînga și modurile dreapta sînt separat supersimetrice.

În funcție de condițiile de frontieră:

$$(\Psi_+ \delta \Psi_+ - \Psi_- \delta \Psi_-) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = 0 \quad (V.55)$$

spațiul de soluții superstring se sectorizează în:

- sectorul periodic (Ramond);
- sectorul antiperiodic (Neveu-Schwartz).

Generatorii superalgebrei Virasoro sînt:

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta (e^{im\vartheta} T_{++} + e^{-im\vartheta} T_{--}) = \int_{-\pi}^\pi \delta\vartheta e^{im\vartheta} T_{++} \\ F_m &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta (e^{im\vartheta} J_+ + e^{-im\vartheta} J_-) = \int_{-\pi}^\pi \delta\vartheta e^{im\vartheta} J_+ \\ (R) \\ G_r &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta (e^{ir\vartheta} J_+ + e^{-ir\vartheta} J_-) = \int_{-\pi}^\pi \delta\vartheta e^{ir\vartheta} J_+ \\ (NS) \end{aligned} \quad (V.56)$$

pentru stringuri deschise, T și J fiind tensorul energie-impuls și supercurentul. În cazul stringurilor închise, generatorii superalgebrei Virasoro sînt construiți în două moduri: combinații de J_+ și T_{++} , respectiv de J_- și T_{--} .

În funcție de cuplajele între modurile stînga și modurile dreapta, se pot defini patru sectoare distincte pentru stringurile închise, deoarece condițiile de periodicitate și antiperiodicitate se pun separat pentru fiecare componentă a lui Ψ :

- $NS - NS, R - R$ - bosoni;
- $NS - R, R - NS$ - fermioni.

Superalgebra Virasoro pentru superstrings este o algebră infinit graduată care conține în anomalia centrală dimensiunea critică $D = 10$, atît pentru fermioni cît și pentru bosoni. Condițiile de frontieră periodice sau antiperiodice conduc la obținerea de moduri semiîntregi - bosoni, respectiv întregi - fermioni. Spectrul teoriei devine liber de tahioni prin formalismul GSO - proiecția spectrului pe stările de fermioni pare. În GSO , numărul de bosoni este egal cu cel de fermioni pentru aceeași masă.

Teoriile superstrings par să fie consistente numai pentru $D = 10$ și grupuri gauge $E_8 \times E_8$, sau $SO(32)$. Pentru ca aceste teorii să posede un

fundament fizic, este necesară elaborarea de formalisme de reducere dimensională și pentru grupul gauge, dar și pentru spațiu-timp. Una dintre posibilitățile de perspectivă este conexiunea cu teoriile de tip Kaluza-Klein.

V.5 DEZVOLTĂRI MATEMATICE ȘI TENDINȚE

Inițial, teoriile de strings au fost dezvoltate pentru descrierea fenomenologică a interacțiilor între hadroni ($\lambda \approx 10^{-15} m$), descriere inconsistentă datorită problematicii dimensiunilor critice - dimensiunea spațiu-timpului nu putea să fie 4, ci numai 10 sau 26. Ulterior, stringurile au fost propuse pentru modelele de teorii unitare, incluzând Yang-Mills, Kaluza-Klein și câmp gravitațional ($\lambda \approx 10^{-34}$).

Începând cu anii '80, stringurile au început să fie abordate din punct de vedere al topologiei și geometriei algebrice. În acest sens, s-au studiat proprietățile suprafețelor de univers prin considerarea acestora ca p-suprafețe Riemann. Astfel, s-a ajuns la clasificarea topologică a diagramelelor de interacție, unde un prim rezultat a fost evidențierea unui invariant pentru fiecare ordin de perturbație [16]. În 1981, Polyakov a prezentat o reformulare a teoriei, care evidenția dintr-un punct de vedere dimensiunile critice $D = 26$ și $D = 10$. Procedul a permis o construcție a modelelor de strings cu dimensiuni inferioare celor critice, de asemenea compactificarea a $D - 4$ dimensiuni și legătura cu teoriile Kaluza-Klein. În această construcție au intervenit varietăți complexe de dimensiune 3 (Calabi-Yau) [18].

În formularea Polyakov (V.54):

$$S_{NG}(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_X dA_x \quad (V.57)$$

unde $x: X \rightarrow \mathbb{R}^D$ este o aplicație suficient de regulată, dA_x este elementul de arie X pe indus de aplicația x , sau măsura pe X care, local, în coordonate x_1 , și x_2 este:

$$dA_x = \left[\left(\left\| \partial_1 \times \right\|^2 \left\| \partial_2 \times \right\|^2 - (\partial_1 \times \partial_2 \times)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx_1 dx_2 \quad (V.58)$$

Se construiește următoarea acțiune:

$$S(g, x) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_X \left[\sum_{i=1}^D ||\nabla x_i||^2 \right] dA \quad (V.59)$$

unde g este o metrică riemanniană, iar $\nabla, ||\cdot||$ și dA sînt gradientul, norma și elementul de arie induse de g . Aceasta acțiune este echivalenta clasic cu acțiunea Nambu-Goto (V.58): dacă diferențiala în g a lui $S(g, x)$ este nulă, atunci $S(g, x) = S_{NG}(x)$. Acțiunea (V.59) admite, evident, invarianțele la deplasări, reparametrizarea și echivalența conformă.

Cuantificarea teoriei bosonice se efectuează, conform Polyakov, [17,19], prin integrala funcțională:

$$\int_{Met(X) \times E} D_g D_x E^{-S(g, x)} \quad (V.60)$$

unde $Met(X)$ este spațiul tuturor metricilor g pe X și E este spațiul aplicațiilor din X în R^D ; $D_g D_x$ este o măsură pe $Met(X) \times E$. Mai explicit, în cazul studiului propagării stringului pe spațiu-timp fixat, calculul funcției de partiție și corelațiile presupune rezolvarea unei teorii de câmp 2-dimensionale pe o suprafață; în cazul stringurilor închise, suprafața este o p -suprafață Riemann. Expresia (V.60) se poate scrie ca:

$$Z = \sum_p \lambda^p \int dx \int \frac{[d\gamma]}{Vol(Diff) * Vol(Conf)} e^{-S[X, \gamma]} \quad (V.61)$$

funcția de partiție pentru stringuri bosonice. $X(\vartheta, \tau)$ este câmpul care descrie scufundarea stringului în spațiu-timp, $\gamma(\vartheta, \tau)$ descrie metrica pe un spațiu de parametri 2-dimensional M și $\frac{1}{Vol(Diff) * Vol(Conf)}$ reprezintă necesitatea integrării peste structurile neechivalente conform pe M ; p este genul suprafeței Riemann.

Deformările conform echivalente pe suprafețe de gen p sînt caracterizate peste toate metricile. (V.61) se reduce la o integrală fi nît dimensională peste spațiul de module al suprafețelor Riemann de gen p - spațiul structurilor complexe neechivalente pe M - notat M_p , care se identifică cu spațiul cît $Met(X)$ modulo acțiunea grupurilor de difeomorfisme și transformări conforme. Este de notat faptul că [20] orice metrică celulează spațiul X în domenii de degenerare, iar această celulare este invariantă de echiva-

lența conformă.

În cazul stringurilor fermionice, [2], în (V.6) integrandul se normează cu supervolumul supercoordonatelor și supertransformărilor conforme, iar $S[X, \gamma]$ este (V.52) pentru o teorie 2-dimensională supersimetrică. Pe o suprafață Riemann de gen P există 2^{2P} structuri spinoriale. Deoarece grupul de difeomorfisme pe M acționează netrivial pe structurile spinoriale, însumarea pe toate structurile spinoriale pentru fiecare fermion impusă de proiecția GSO conduce la necesitatea invariantei acestei sume la grupul de difeomorfisme neconexe pe M - așa numita invarianță modulară. Metodele matematice necesare pentru elaborarea unui model consistent pentru cuantificarea prin metoda integralei funcționale sînt cele ale geometriei algebrice: varietăți Kahler, uniformizarea g -suprafețelor Riemann, omotopie și coomologie pentru varietăți complexe.

O altă tendință este generată de apariția unui boson vectorial de masă de repaus zero și spin doi, identificat cu un graviton, în teoria stringului bosonic închis. Apariția acestei particule sugerează că superstringurile pot conduce la teoria relativității generale.

Superstringurile sînt construite pe un spațiu-timp Minkowski fixat. Pentru apropierea de TRG , ar fi interesantă construirea unei teorii superstrings pe alt suport decît cel Minkowski. Se poate scrie o acțiune superstring generalizată, pornind de la (V.4):

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\hat{t} d\tau \sqrt{-h} (h^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + super \dots) \quad (V.62)$$

unde $g_{\mu\nu}(X)$ este o pseudometrică cu $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 9$. Această acțiune nu conduce însă la o teorie consistentă (în principiu, prin cuantificarea Polyakov nu se obțin particule cu masa nulă) [21]. Există șanse pentru varietăți bază de timp $M^4 \times K^6$, sau pentru anumite condiții impuse tensorului energie-impuls, de exemplu:

$$T_\alpha^\alpha = aR + \beta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial^\beta X^\nu h^{\alpha\beta} + super \dots = 0 \quad (V.63)$$

Partenerii supersimetrici adecvați par a fi cei corespunzători stringului heterotic. În acest caz, câmpurile sînt moduri stînga sau moduri dreapta pe suprafața de univers. În reprezentarea fermionică din V.4, există un spinor S 10-dimensional cu moduri dreapta și 32 de spinori 2-dimensionali cu moduri stînga, Ψ^m , care sînt scalari $s-t$. Pentru spațiu-timp 10-dimensional Ricci plat, se poate scrie o acțiune de string heterotic pe un spațiu cu curbura nenulă, în coordonate light-cone:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau (g_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\alpha X^j + i\bar{S}\Gamma\bar{D}_+ S + \Psi^m D_- \Psi^m + F_{ij}^A \bar{S}\Gamma - \Gamma^i \Gamma^j S T_{mn}^A \Psi^m \Psi^n) \quad (V.64)$$

unde i, j sînt coordonate pe spațiul transversal la suprafața de univers $\mathbb{R}^2 \times K$ și S este în light-cone gauge $\Gamma^+ S = 0$. F_{ij}^A este câmpul Yang-Mills $SO(32)$ sau $E_8 \times E_8$, T_{mn}^A fiind generatori adecvați. $D_\pm$ este derivata covariantă referitor la câmpurile gauge ale suportului conținînd și conexiunile de spin. D este legată de conexiunea din spațiu-timp D_j astfel: $D_\pm = (\partial_\pm X_j) D_j$.

În esență, rezultatul de mai sus demonstrează că se poate construi o teorie de superstring pe o varietate cu curburi, dar plată din punct de vedere Ricci. Modelări ulterioare vor demonstra dacă o astfel de teorie poate descrie tot spectrul superstrings. Pentru varietăți spațiu-timp generale, problema rămîne deschisă. Rezultatele sînt așteptate prin considerarea suprafețelor de univers nu numai ca suprafețe Riemann, dar și ca suprafețe neorientabile, de asemenea, prin considerarea superstringurilor pe modele laticiale de spațiu-timp și prin calcul simplificat [22,23].

V.5 CONCLUZII

Cu toate dificultățile tehnice principale, teoriile strings și superstrings sînt larg abordate și dezvoltate datorită faptului că rezolvă probleme majore în teoriile de câmp, cum ar fi:

Infiniți ultravioleți. În teoriile de câmp uzuale, datorită conceptului de particulă punctiformă, apar în mod evident infiniți asimptotici. Conceptul de renormalizabilitate rezolvă parțial problema, dar consistența sa matematică este neclară. Pare evident ca un model de particulă extinsă ar rezolva problema, dar, ceea ce este interesant este că teoria strings este prima care oferă un model consistent complet.

Divergențe nonrenormalizabilitate. Tentativele de a unifica gravitația cu celelalte interacțiuni conduc la divergențe nonrenormalizabile. Supergravitația reușește parțial să eludeze aceasta, dar problema se pune în conti-

nuare pentru ordine de perturbație superioară. Teoria superstrings este singura care conduce la o teorie unitară finită.

Constantele de cuplaj. Spre deosebire de modelul gauge standard, care conține 20 de parametri adimensionali, teoriile superstrings conțin în principiu, un singur parametru, α , cu dimensiune de lungime. De asemenea, se poate include ca parametru și D - dimensiunea critică.

Formalismele strings și superstrings conduc la reprezentarea matematică consistentă a unor modele de primă importanță în fizică: dependența masă-moment cinetic Regge, gravitonul, renormalizarea unor procese de scattering prin clasificarea omotopică a diagramelor, completare naturală a teoriilor de tip Kaluza-Klein.

Dezavantajul major aparent al acestor modele este gradul ridicat de dificultate matematică. Utilizarea grupurilor de simetrie implicate, ca $SO(32)$ sau $E_8 \times E_8$ este extrem de laborioasă. De asemenea, o teorie de tip superstring nu poate fi înțeleasă și dezvoltată decât prin manevrarea eficientă a geometriei algebrice, topologiei algebrice, teoriile gauge pe latice, algebrelor cu sarcina centrală, teoria numerelor. Cu toate acestea, considerăm că aceste teorii au adus în știința secolului, din punct de vedere conceptual, idei fundamentale comparabile doar cu cele ale teoriei relativității sau ale mecanicii cuantice. Studiul lor, datorită dificultăților tehnice dar și datorită satisfacțiilor teoretice, este deosebit de util, cel puțin din punct de vedere didactic, și este un superb exercițiu intelectual.

BIBLIOGRAFIE

1. N.D.Birrell, P.C.W.Daves, *Quantum field on curved space*, Cambridge Univ. Press (1982).
2. W.Greiner, B.Muller, J.Rafelski, *Quantum electrodynamics of strong fields*, Springer (1985).
3. C.W.Misner, K.Thorne, J.A.Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).
4. S.Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1972).
5. J.H.Schwartz, Phys. Reports 89, 3, 223 (1982).
6. P.H.Frampton, *Dual resonance models*, Benjamin (1974).
7. G.Veneziano, Nuovo Cimento 57A, 190 (1968), Phys.

VI. TEORII FIZICE ÎN SPAȚII DEPENDENTE DE DIRECȚIE

(M. Agop)

VI.1 GENERALITĂȚI

„Cadrul clasic Riemannian prezintă dezavantajul structurii triviale a fibratului tangent asociat, structură ce este descrisă cu ajutorul geometriei Euclidiene. Spre deosebire de acest cadru, geometria spațiilor Finsler - dezvoltată în esență pe fibratul tangent, produce o structură de fibrat ale cărei fibre prezintă atât o curbă verticală netrivială, cât și - element special - curbă mixtă” [1].

În ultimii ani școala românească de geometrie (*Radu Miron, Mihai Anastasiei și alții*) considerând o distribuție suplimentară distribuției verticale pe fibratul tangent a studiat spațiul total al unui fibrat vectorial. „S-a degajat conceptul de spațiu Lagrange, determinat de fibratul tangent împreună cu un langrangean și s-a pus în evidență spațiul Langrange generalizat” [2]. Acest ultim spațiu cuprinde ca un caz particular spațiul Lagrangean, „care se specializează în spații Finsler și care, la rândul lor, subordonează spațiile lui Riemann” [2]. Se obțin astfel noi modele geometrice pentru anumite teorii fizice.

„Într-adevăr, identificând un spațiu Langrange generalizat cu modelul său aproape Hermitian pe fibratul tangent se obține o interesantă teorie lagrangeană a relativității și se dovedește existența unor atari modele în care legile de conservare sînt verificate. Pe această cale se obține în particular modelul finslerian al teoriei gravitației, sistemul complet de ecuații Einstein ...” [2]. G.S.Asanov în [3], A.Bejancu în [4], [5] au dezvoltat geometria și teoria gauge a spațiului Finsler iar V.D.Bălan în [1] construiește pentru cazul fibratului vectorial înzestrat cu d-cîmpuri de obiecte geometrice teoria gauge generalizată pe spații fibrate local triviale.

O contribuție importantă în dezvoltarea unor asemenea probleme a avut și școala japoneză de geometrie prin: Y.Takano, S.Ikeda, H.Ishikawa, T.Kawaguchi și alții. Asupra lucrărilor acestei școli o bibliografie bogată este dată în [2], [4] și [5].

În cele ce urmează vom studia atît fenomene gravitaționale cunoscute: (avansul periheliului planetar, deflexia fotonilor) cît și electrodinamica clasică, pe baza unor asemenea modele.

VI.2 APROXIMAȚIA POST-NEWTONIANĂ ÎN OPTICA RELATIVISTĂ

Spațiile Langrange generalizate de metrică:

$$g_{ij}(x, y) = h_{ij}(x) + \frac{\alpha}{c^2} y_i y_j \quad (\text{VI.1})$$

$$y_i = h_{ij} \dot{x}^j \quad (\text{VI.2})$$

cu $h_{ij}(x)$ metrica Riemann și α o constantă, au fost utilizate în studiul fenomenelor gravitaționale [6,7]. În [6] s-a studiat aproximația post-Newtoniană a metricii (VI.1) și s-a ajuns la concluzia că observațiile astronomice impun constrîngerea:

$$\alpha \leq 10^{-3} \quad (\text{VI.3})$$

În lucrarea [8] este reexaminată aceeași aproximație din [6,7] și se arată că restricția ce trebuie impusă se referă la o combinație a lui α cu parametru standard β a metricii Riemann.

O generalizare naturală a metricii (VI.1) a fost dată de J.L.Synge în [9] sub forma:

$$g_{ij}(x, y) = h_{ij}(x) + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) y_i y_j \quad (\text{VI.4})$$

cu n indicele de refracție al „mediului”, pentru studiul opticii relativiste. R.G.Beil în [10,11] a extins metrica (VI.4) la expresia:

$$g_{ij}(x, y) = h_{ij}(x) + \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) y_i y_j \quad (\text{VI.5})$$

În cel mai general caz:

$$n = n(x, \dot{x}) \quad (\text{VI.6})$$

ceea ce corespunde unui „mediu” neomogen și dispersiv. Dacă se admite însă că:

$$n = n(x) \quad (\text{VI.7})$$

atunci „dispunem” de un „mediu” neomogen și nedispersiv.

În [12] alegînd pentru n^2 expresia:

$$n^2 \approx 1 + \varepsilon U + \delta \frac{v^2}{c^2} + \mu U \frac{v^2}{c^2} + \nu U^2 + \sigma \frac{v^4}{c^4} \quad (\text{VI.8})$$

cu

$$U = \frac{GM}{c^2 r} \quad (\text{VI.9})$$

și $\varepsilon, \delta, \mu, \nu, \sigma$ noi parametrii post-Newtonieni, se studiază aceeași aproximație din [6,7,8]. Să prezentăm în continuare această lucrare.

Constucția lagrangeanului

Să considerăm, ca și în [6,7,8] lagrangeanul de forma:

$$L = -m_0 c \frac{dS}{dt} = -m_0 c (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.10})$$

Atunci, alegînd metrica de forma (VI.5), acest langrangean ia forma:

$$L = -m_0 c \left\{ S \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) S \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.11})$$

unde:

$$S = h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (\text{VI.12})$$

Apoi, avînd în vedere că

$$S = \left(h_{00} + 2 h_{0\alpha} \frac{v^\alpha}{c} + h_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} \right) c^2 \quad (\text{VI.13})$$

putem scrie lagrangeanul din (VI.11) astfel:

$$L = -m_v c^2 \left\{ h_{00} + 2 h_{0\alpha} \frac{v^\alpha}{c} + h_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} + \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) h_{00}^2 + \right. \\ \left. + 4 h_{0\alpha} h_{0\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} + h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \frac{v^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta}{c^4} + 4 h_{00} h_{0\alpha} \frac{v^\alpha}{c} + \right. \\ \left. + 2 h_{00} h_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} + 4 h_{0\alpha} h_{\beta\gamma} \frac{v^\alpha v^\beta v^\gamma}{c^3} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (VI.14)$$

Cazul pur Riemannian se obține în următoarele alternative:

- a) fie $\alpha \rightarrow 0$, oricare ar fi $n \neq 0$, situație comparabilă cu cele din [7,8];
- b) fie $n \rightarrow 1$ oricare ar fi $\alpha \neq 0$.

În ambele alternative, lagrangeanul (VI.14) se reduce la expresia:

$$L \rightarrow -m_0 c^2 \left(h_{00} + 2 h_{0\alpha} \frac{v^\alpha}{c} + h_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (VI.15)$$

Lagrangeanul câmpului gravitațional static cu simetrie sferică

Pentru un câmp gravitațional cu simetrie sferică [6,7] putem alege:

$$\gamma_{00} = 1 - 2U + 2\beta U^2 \quad (VI.16)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} (1 + 2\gamma U)$$

$$\gamma_{0\alpha} = 0$$

mărimile ce intervin în (VI.16) avînd semnificația obișnuită din [13]. Atunci lagrangeanul (VI.14) devine:

$$L = -m_0 c^2 \left\{ 1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) - 2U \left[1 + 2\alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] - \right. \\ \left. \frac{v^2}{c^2} \left[1 + 2\alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] - 2U \frac{v^2}{c^2} \left[\gamma + 2\alpha(\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2U^2 \left[\beta + 2\alpha(1 + \beta) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] + \alpha \frac{v^4}{c^4} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (VI.17)$$

Acest lagrangean se reduce la cel dat de G.S.Asanov și T.Kawaguchi

[7], dacă se admite identificarea:

$$1 - \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{c^2} \quad (\text{VI.18})$$

adică pentru „medii” nedispersive (omogene), cu indice de refracție constant.

În continuare să alegem pentru n^2 expresia (VI.18).

Acum, introducând relația (VI.18) în (VI.17) dezvoltând în serie radicalul din (VI.17) și omițând termenul constant $m_0 C^2$, care nu aduce nici o contribuție la ecuațiile de mișcare, se obține:

$$\begin{aligned} L = & -m_0 c^2 U \left(1 - \frac{\alpha \varepsilon}{2} \right) + \frac{1}{2} m_0 v^2 (1 - \alpha \delta) + \\ & + m_0 c^2 U^2 \left(-\beta + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha \varepsilon}{2} - \frac{\alpha v}{2} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{8} \right) + \\ & + m_0 v^2 U \left(\gamma + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha \varepsilon}{4} - \frac{\alpha \mu}{2} + \frac{3\alpha \delta}{2} + \alpha \varepsilon \delta + \frac{\alpha^2 \varepsilon \delta}{4} \right) + \\ & + m_0 \frac{v^4}{c^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3\alpha \delta}{4} - \frac{\alpha \sigma}{2} + \frac{\alpha \delta^2}{2} + \frac{\alpha^2 \delta^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

Această ultimă expresie se reduce la cazul pur Riemannian:

$$\begin{aligned} L \rightarrow & m_0 c^2 U + \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 U c^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) + \\ & + \frac{1}{2} m_0 v^2 U (1 + 2\gamma) + m_0 \frac{v^4}{8 c^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

- fie pentru $\alpha \rightarrow 0$ oricare ar fi $\varepsilon, \delta, \mu, v, \sigma \neq 0$,
- fie pentru $\varepsilon, \delta, \mu, v, \sigma \rightarrow 0$ oricare ar fi $\alpha \neq 0$.

Pentru o mai bună corespondență cu rezultatele din [7,8] lagrangeanul (VI.19) poate fi pus și sub forma:

$$\frac{L}{m_0 \lambda_0} \approx \frac{1}{2} v^2 + U c^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + U^2 c^2 \frac{\lambda_2}{\lambda_0} + v^2 U \frac{\lambda_3}{\lambda_0} + \frac{v^4}{c^2} \frac{\lambda_4}{\lambda_0} \quad (\text{VI.21})$$

unde s-au admis substituțiile:

$$\lambda_0 = (1 - \alpha \delta) ; \quad \lambda_1 = 1 - \frac{\alpha \varepsilon}{2}$$

$$\lambda_2 = -\beta + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha\varepsilon}{2} - \frac{\alpha v}{2} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{8} \quad (\text{VI.22})$$

$$\lambda_3 = \left(\gamma + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha\varepsilon}{4} - \frac{\alpha\mu}{2} + \frac{3\alpha\delta}{2} + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\varepsilon\delta + \frac{\alpha^2\varepsilon\delta}{4} \right)$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{1}{8} + \frac{3\alpha\delta}{4} - \frac{\alpha\sigma}{2} + \frac{\alpha\delta^2}{2} + \frac{\alpha^2\delta^2}{8} \right)$$

Acest ultim rezultat s-a obținut avînd în vedere că ecuațiile de mișcare nu se modifică dacă multiplicăm lagrangeanul cu o constantă nenulă.

Constrîngerii în aproximația post-Newtoniană a metricii Lagrange (VI.5)

Aproximația de ordin zero a lagrangeanului (VI.21) trebuie să coincidă cu teoria newtoniană. Prin urmare se obține o primă constrîngere:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 \quad (\text{VI.23})$$

ceea ce implică

$$\frac{\varepsilon}{2} = \delta \quad (\text{VI.24})$$

Folosind (VI.24), lagrangeanul (VI.21) devine:

$$\frac{L}{m_0 \lambda_0} = \frac{1}{2} v^2 + U c^2 + \lambda'_1 U^2 c^2 + \lambda'_2 U v^2 + \lambda'_3 \frac{v^4}{c^2} \quad (\text{VI.25})$$

unde s-a notat:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \left(-\beta + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha\varepsilon}{2} - \frac{\alpha v}{2} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{8} \right) / \left(1 - \frac{\alpha\varepsilon}{2} \right) \\ \lambda'_2 &= \left(\gamma + \frac{1}{2} + 3\alpha\varepsilon - \frac{\alpha\mu}{2} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{8} \right) / \left(1 - \frac{\alpha\varepsilon}{2} \right) \\ \lambda'_3 &= \left(\frac{1}{8} + \frac{3\alpha\varepsilon}{8} - \frac{\alpha\sigma}{2} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{8} + \frac{\alpha^2\varepsilon}{32} \right) / \left(1 - \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.26})$$

Pentru ca lagrangeanul (VI.25) să satisfacă testul deplasării periheliului

este necesar să introducem constrângerea [8]:

$$\Delta = \lambda'_1 + 2\lambda'_2 + 4\lambda'_3 = 2 + 2\gamma - \beta + 9\alpha\varepsilon - \alpha\mu - 2\alpha\sigma - \frac{v\alpha^2}{2} + 2\alpha\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2} \Big/ \left(1 - \frac{\alpha\varepsilon}{2}\right) = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.27})$$

Dacă această teorie este self-consistentă este necesar ca metrica (VI.5) să verifice și condiția de propagare a luminii. Rezultă:

$$\gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \right] = 0 \quad (\text{VI.28})$$

de unde, ținând seama de [7,8] trebuie să alegem

$$\gamma = 1 \quad (\text{VI.29})$$

Cu această valoare pentru γ , constrângerea (VI.27) devine:

$$\left(-\beta + 4 + 9\alpha\varepsilon - \alpha\mu - 2\alpha\sigma + 2\alpha\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2} \right) \Big/ \left(1 - \frac{\alpha\varepsilon}{2} \right) = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.30})$$

Alegerea parametrilor $\varepsilon, \delta, \mu, v, \sigma$ din dezvoltarea (VI.8) a lui n^2 depinde în mod esențial de natura fizică a „mediului” dispersiv. Se pot caracteriza două cazuri limită:

a) Dacă „mediul” este nedispersiv trebuie să alegem $\delta = \mu = \sigma = 0$, care implică și $\varepsilon = 0$. Atunci:

Pentru „mediile” nedispersive, parametrii post-Newtonieni α, v și σ satisfac constrângerea:

$$4 - \beta - \frac{\alpha v}{2} = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.31})$$

Obs. Acesta este cazul care se întâlnește frecvent în aplicații din optica relativistă [9].

b) Dacă „mediul” este total dispersiv, adică indicele de refracție depinde numai de viteză, $n = n(\dot{x})$, atunci trebuie să alegem valorile $\varepsilon = \mu = v = 0$, care implică și $\delta = 0$. Se obține:

$$4 - \beta - 2\alpha\sigma = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.32})$$

VI.3 O APROXIMAȚIE POST-NEWTONIANĂ A METRICII*

$$g_{ij}(x, y) = e^{\sigma(x, y)} h_{ij}(x)$$

O generalizare a metricii (VI.5) este dată în [1] și este de forma:

$$g_{ij}(x, y) = e^{\sigma(x, y)} h_{ij}(x) \quad (\text{VI.33})$$

Alegînd pentru

$$\sigma \equiv \frac{\alpha}{c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) h_{ij}(x) \quad (\text{VI.34})$$

și menținînd pentru coeficienții lui $h_{ij}(x)$ aceleași expresii (VI.16) să studiem în continuare aproximația post-Newtoniană a acestei metrici. În acest scop vom urmări lucrarea [14]:

Fie un mediu cu indicele de refracție (VI.8). Atunci pentru metrica statică (VI.16), aproximația post-Newtoniană [6,7,8] abstractii făcînd de constanta aditivă $m_0 c^2$, implică următoarea expresie a lagrangeanului:

$$\begin{aligned} L \approx m_0 c^2 U (1 - \alpha \varepsilon) + \frac{1}{2} m_0 v^2 (1 - 2\alpha \delta) + m_0 c^2 U^2 \left(-\beta + \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + 3\alpha \varepsilon - \alpha \nu + \alpha \varepsilon^2 - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \right) + m_0 v^2 U \left(\gamma + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha \varepsilon}{2} - \alpha \mu + 3\alpha \delta + \right. \\ \left. + 2\alpha \varepsilon \delta - \alpha^2 \varepsilon \delta \right) + m_0 \frac{v^4}{c^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3\alpha \delta}{2} - \alpha \sigma + \alpha \delta^2 - \frac{\alpha^2 \delta^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

Acest lagrangean ia încă forma:

$$\frac{L}{m_0 \lambda_0} = \frac{1}{2} v^2 + U c^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + U^2 c^2 \frac{\lambda_2}{\lambda_0} + v^2 U \frac{\lambda_3}{\lambda_0} + \frac{v^4}{c^2} \frac{\lambda_4}{\lambda_0} \quad (\text{VI.36})$$

dacă se admit substituțiile:

* M.Agop, C.Ciubotariu, V.Griga, B.Ciobanu, *Lucrare nepublicată*

$$\lambda_0 = (1 - \alpha \varepsilon) ; \lambda_1 = 1 - 2\alpha \delta ; \lambda_2 = -\beta + \frac{1}{2} + 3\alpha \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} - \alpha \gamma$$

$$\lambda_3 = \left(\gamma + \frac{1}{2} + \frac{3\alpha \varepsilon}{2} - \alpha \mu + 3\alpha \delta + 2\alpha \varepsilon \delta - \alpha^2 \varepsilon \delta \right) \quad (\text{VI.37})$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{1}{8} + \frac{3\alpha \delta}{2} - \alpha \sigma + \alpha \delta^2 - \frac{\alpha^2 \delta^2}{2} \right)$$

avînd în vedere faptul că ecuațiile de mișcare nu se modifică dacă-l multiplicăm cu constanta $(m_0 \lambda_0)^{-1} \neq 0$.

Aproximația de ordin zero a lagrangeanului (VI.35) trebuie să coincidă cu teoria newtoniană. Atunci se obține o primă constrîngere:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 \quad (\text{VI.38})$$

ceea ce implică:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \delta \quad (\text{VI.39})$$

Cu relația (VI.38) expresia (VI.35) devine:

$$\frac{L}{m_0 \lambda_0} \rightarrow \frac{1}{2} v^2 + U c^2 + \lambda'_1 U^2 c^2 + \lambda'_2 U v^2 + \lambda'_3 \frac{v^4}{c^2} \quad (\text{VI.40})$$

unde am luat:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \frac{\left(-\beta + \frac{1}{2} + 3\alpha \varepsilon - \alpha \gamma + \alpha \varepsilon^2 - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \right)}{(1 - \alpha \varepsilon)} \\ \lambda'_2 &= \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2} + 3\alpha \varepsilon - \alpha \mu + \alpha \varepsilon^2 - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \right)}{(1 - \alpha \varepsilon)} \\ \lambda'_3 &= \frac{\left(\frac{1}{8} + \frac{3\alpha \varepsilon}{4} - \alpha \sigma + \frac{\alpha \varepsilon^2}{4} - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{8} \right)}{(1 - \alpha \varepsilon)} \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

Acum ca și lagrangeanul (VI.40) să satisfacă deplasarea periheliului este necesar să introducem constrîngerea:

$$\Delta = \lambda'_1 + 2\lambda'_2 + 4\lambda'_3 =$$

$$= \frac{(2 + 2\gamma - \beta + 12\alpha\varepsilon - \alpha\nu - 2\alpha\mu - 4\alpha\sigma + 4\alpha\varepsilon^2 - 2\alpha^2\varepsilon^2)}{(1 - \alpha\varepsilon)} = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.42})$$

Pentru ca teoria să fie self-consistentă este necesar ca aceeași metrică (VI.33) să satisfacă și propagarea luminii. Rezultă:

$$e^{\frac{\alpha}{c^2}(1 - \frac{1}{n^2})h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \rightarrow 0 \quad (\text{VI.43})$$

de unde se obține:

$$\gamma = 1$$

În final se obține constrângerea:

$$\frac{(-\beta + 12\alpha\varepsilon - \alpha\nu - 2\alpha\mu - 4\alpha\sigma + 4\alpha\varepsilon^2 - 2\alpha^2\varepsilon^2 + 4)}{(1 - \alpha\varepsilon)} = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.44})$$

Se disting următoarele situații limită:

a) mediu neomogen și nedispersiv; atunci:

$$\delta = \mu = \sigma = 0 \quad (\text{VI.45})$$

asa încât relațiile (VI.8) și (VI.42) devin:

$$n^2 = 1 + \nu U^2 \quad (\text{VI.46})$$

respectiv:

$$4 - \beta - \alpha\nu = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.47})$$

b) mediu omogen și dispersiv; atunci

$$\varepsilon = \mu = \nu = 0 \quad (\text{VI.48})$$

iar relațiile (VI.8) și (VI.42) dau succesiv:

$$n^2 = 1 + \sigma \frac{V^4}{c^4} \quad (\text{VI.49})$$

și

$$4 - \beta - 4\alpha\sigma = 3 \pm 10^{-2} \quad (\text{VI.50})$$

VI.4 ELECTRODINAMICA CLASICĂ*

Să admitem în (VI.33) că „mediul” este nedispersiv și identificările [14]:

$$\sigma = \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); \quad h_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (\text{VI.51})$$

Atunci lagrangeanul are expresia:

$$L = -m_0 c^2 e^{\alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.52})$$

de unde, utilizând ecuațiile Euler, se obține ecuația de mișcare [15]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{2\alpha}{n^3} \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \nabla n + \frac{1}{c^2} \frac{\left(\vec{v} \nabla n + \frac{\partial n}{\partial t} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right] \quad (\text{VI.53})$$

Acest ultim rezultat ia forma cunoscută:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \quad (\text{VI.54})$$

cu substituțiile:

$$\vec{E} = \frac{2\alpha}{n^3} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\nabla n + \frac{1}{c^2} \frac{\partial n}{\partial t} \vec{v} \right) \quad (\text{VI.55})$$

* M.Agop, C.Dariescu, A.Dariescu, V.Griga, *Lucrare nepublicată*

$$\vec{H} = \frac{2\alpha}{n^3} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \nabla n \right)$$

Se constată imediat că $\vec{E}$ este un vector polar, iar $\vec{H}$ un vector axial (pseudovector). Mai mult chiar se poate demonstra că ei formează tensorul antisimetric:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y & iE_x \\ H_z & 0 & -H_x & iE_y \\ -H_y & H_x & 0 & iE_z \\ iE_x & iE_y & -iE_z & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.56})$$

Într-adevăr, prin calculul direct se obțin invariabilită:

$$\vec{E} \vec{H} = 0 ; E^2 - H^2 = I \quad (\text{VI.57})$$

unde

$$I = \frac{4\alpha^2}{n^6} \left[(\nabla n)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{c^2 - v^2} \left(\mathbf{v} \nabla n + \frac{\partial n}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.58})$$

Acum ecuația (VI.55) se poate scrie sub forma covariantă:

$$m_0 \ddot{x}^\mu - \frac{1}{c} \dot{x}^\mu F_\mu^\nu = 0 \quad (\text{VI.59})$$

unde derivatele indexate prin puncte au fost luate în raport cu timpul propriu:

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

Observație: Pornind de la invariantul (VI.58) se poate dezvolta, prin analogie cu electrodinamica neliniară a lui Born-Infeld [18], o gravitodinamică neliniară. În acest caz lagrangeanul are forma:

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi} \left[1 - \left(1 - \frac{I}{E_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{VI.60})$$

unde E_0 este așa numitul câmp maxim.

VI.5 CONCLUZII PRELIMINARE

Analiza făcută în paragraful VI.2 și VI.3 arată că în cazul mediilor dispersive cu indice de refracție $n = n(x, \dot{x})$ testele post-Newtoniene din sistemul Solar nu impun separat o constrângere pentru α , ci numai asupra unei combinații a lui α cu parametrul standard β și parametrii introduși în dezvoltarea (VI.8) a lui n^2 . Constrângerile sînt date prin relațiile (VI.30) respectiv (VI.44); desigur acestea sînt complicate, alegerea parametrilor din dezvoltarea lui n^2 depinzînd de natura fizică a „mediului” ce umple spațiul. Constrângerile menționate se simplifică considerînd cazul mediilor nedispersive, cînd rezultă formele simple (VI.31) și (VI.47), precum și în cazul mediilor total dispersive cînd se obțin relațiile (VI.32), (VI.50) de asemeni simple.

Aceste ultime observații conduc la unele concluzii interesante și anume:

b) „mediul” care umple spațiul nu poate fi un cîmp gravitațional pur așa cum se indică [17] întrucît dacă această afirmație ar fi adevărată atunci n^2 ar avea expresia [13]:

$$n^2 \approx 1 + 4U + \dots \quad (\text{VI.61})$$

ceea ce nu este cazul la noi.

Pentru un spațiu gravitațional pur metrica Riemanniană:

$$ds_R^2 = h_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{VI.62})$$

are expresia [19]:

$$ds_R^2 = \frac{1}{n} (c dt)^2 - n(d\vec{r})^2 \quad (\text{VI.63})$$

unde $n = n(r)$ este indicele de refracție gravitațional. Cu (VI.63) lagrangeanul (VI.11) devine:

$$L = -m_0 c^2 \left[\frac{1}{n} \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2} \right) + \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.64})$$

Să admitem în continuare pentru n expresia:

$$n \approx 1 + \varepsilon U + v U^2 + \dots \quad (\text{VI.65})$$

În aceeași aproximație post-Newtoniană (paragrafele (VI.2) și (VI.3)) lagrangeanul (VI.64) cu (VI.65) ia forma:

$$L \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2 U \left(\frac{\varepsilon}{2} - \alpha \varepsilon \right) + m_0 c^2 U^2 \left(\frac{v}{2} - \alpha v + \frac{1}{8} \varepsilon^2 + 3\alpha \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \varepsilon^2 \right) + m_0 v^2 U \left(\frac{3\varepsilon}{4} + \frac{3\alpha \varepsilon}{2} \right) + m_0 \frac{v^4}{c^2} \frac{1}{8} \quad (\text{VI.66})$$

Analiza pe acest lagrangean, pe lângă constrîngerile obișnuite [6,7,8] va trebui să satisfacă și

$$\alpha < 0 \quad (\text{VI.67})$$

ceea ce va schimba radical caracterul metricii (VI.5).

b) analiza din paragraful (VI.4) indică existența unui „fond primar electromagnetic” echivalent „fondului cosmologic”. Orice câmp fizic ce va interacționa cu acest „vacuum degenerat” va da naștere, în anumite condiții, la masă. Să studiem în continuare acest mecanism.

VI.6 UN POSIBIL MECANISM DE GENERARE A MASEI*

Modelul „sine-Gordon” a fost utilizat în studiul câmpurilor neliniare cu vacuum degenerat [20]. Lucrările ulterioare s-au axat mai mult pe proprietățile topologice ale „Kink-ului” [20,21] soluție a acestui model.

Prezentul paragraf are drept scop utilizarea funcțiilor eliptice în studiul modelului sine-Gordon. Se va arăta că soluția generală a problemei este o funcție eliptică, soluția „Kink” fiind dată de degenerarea acesteia în perioada reală.

Introducerea „mărimilor binare” permite interpretarea mecanismului Higgs drept un proces de eliminare a „excesului de sarcină” de pe starea de vid, prin creere de masă.

* M.Agop, *Lucrare nepublicată*

Soluțiile problemei

Fie ecuația energiei sub forma [21]:

$$\frac{1}{2}(1-v^2)\left(\frac{dF}{du}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2(1 - \cos \lambda F) + \xi \quad (\text{VI.68})$$

cu

$$F(u) = F(x; vt) \quad (\text{VI.69})$$

și

$$\xi = \text{const.} \quad (\text{VI.70})$$

Schimbarea de funcție:

$$\psi = \frac{\lambda F}{2} \quad (\text{VI.71})$$

cu:

$$\mu^2 = -\rho^2 \quad (\text{VI.72})$$

o transformă astfel:

$$\left(\frac{d\psi}{du}\right) = \frac{\xi \lambda^2}{2(1-v^2)} - \frac{\rho^2}{(1-v^2)} \sin^2 \Psi \quad (\text{VI.73})$$

Se deosebesc situațiile:

a) $\xi > 2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2$, caz în care relația (VI.73) cu substituțiile:

$$\sin \psi = z ; k^2 = \frac{2}{\xi} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{VI.74})$$

dau, prin integrare, integrala eliptică sub forma normală Legendre [22]:

$$u - u_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi \lambda^2}{2(1-v^2)}}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} ; u_0 = \text{const.} \quad (\text{VI.75})$$

Inversa acestei integrale este funcția eliptică:

$$\sin \frac{\lambda F}{2} = \text{sn} \left[\sqrt{\frac{\xi \lambda^2}{2(1-v^2)}} (u - u_0) \right] \quad (\text{VI.76})$$

de perioadă reală:

$$T_1 = \frac{4}{\sqrt{\frac{\xi \lambda^2}{2(1-v^2)}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \quad (\text{VI.77})$$

și perioadă imaginară

$$T_2 = \frac{2i}{\sqrt{\frac{\xi \lambda^2}{2(1-v^2)}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi}} \quad (\text{VI.78})$$

cu

$$k^2 + k'^2 = 1 \quad (\text{VI.79})$$

b) $\xi < 2\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2$, caz în care relația (VI.73) cu substituțiile:

$$\sin \psi = k_0 \sin \rho = k_0 S ; \quad k_0^2 = \frac{\xi}{2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right)^2 \quad (\text{VI.80})$$

dă prin integrare, integrala eliptică sub forma normală Legendre:

$$u - u_0 = \frac{\sqrt{1-v^2}}{\rho} \int_0^S \frac{dS}{\sqrt{(1-S^2)(1-k_0^2 S^2)}} \quad (\text{VI.81})$$

Inversa acestei integrale este funcția eliptică:

$$\sin \frac{\lambda F}{2} = k_0 \operatorname{sn} \left[\frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} (u - u_0) \right] \quad (\text{VI.82})$$

de perioadă reală:

$$T'_1 = \frac{4\sqrt{1-v^2}}{\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_0^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{VI.83})$$

și perioadă imaginară:

$$T'_2 = \frac{2i\sqrt{1-v^2}}{\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_0'^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{VI.84})$$

cu

$$k_0^2 + k_0'^2 = 1 \quad (\text{VI.85})$$

Degenerările soluțiilor

Pentru situația a) să alegem $\mu \rightarrow 0$. Atunci

$$k^2 \rightarrow 0 \quad (\text{VI.86})$$

asa încât relațiile (VI.77), (VI.78) și (VI.76) dau succesiv:

$$T_1 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{2(1-v^2)}{\xi}} \quad (\text{VI.87})$$

$$T_2 \rightarrow \infty \quad (\text{VI.88})$$

și

$$sn \rightarrow \sin \quad (\text{VI.89})$$

Se găsește soluția:

$$F \rightarrow \sqrt{\frac{2\xi}{1-v^2}} (u - u_0) \quad (\text{VI.90})$$

Pentru situația b) să alegem $\lambda \rightarrow 0$. Atunci:

$$k_0^2 \rightarrow 0 \quad (\text{VI.91})$$

și relațiile (VI.83), (VI.84) și (VI.82) dau:

$$T'_1 \rightarrow \frac{2\pi\sqrt{1-v^2}}{\rho} \quad (\text{VI.92})$$

$$T'_2 \rightarrow \infty \quad (\text{VI.93})$$

și

$$\sin \frac{\lambda F}{2} \rightarrow \frac{\lambda F}{2} \quad (\text{VI.94})$$

Se găsește soluția:

$$F \rightarrow \exp \left[\frac{i \rho}{\sqrt{1-v^2}} (u - u_0) \right] \quad (\text{VI.95})$$

Fie acum:

$$\xi \rightarrow \frac{2 \rho^2}{\lambda^2} \quad (\text{VI.96})$$

Atunci

$$k^2 = k_0^2 \rightarrow 1 \quad (\text{VI.97})$$

iar relațiile (VI.77), (VI.78), (VI.83), (VI.84) și (VI.75) (VI.81) dau

$$T_1 = T'_1 \rightarrow \infty \quad (\text{VI.98})$$

și

$$T_2 = T'_2 \rightarrow \frac{\pi i \sqrt{1-v^2}}{\rho} \quad (\text{VI.99})$$

și, abstractii făcînd de-o constantă

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda F}{4} \right) \right| = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} (u - u_0) \quad (\text{VI.100})$$

Se găsește soluția „kink” [21]:

$$F \rightarrow \frac{4}{\lambda} \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} (u) \right] \right\} \quad (\text{VI.101})$$

Interpretări

Să alegem pentru constanta energiei valoarea [20]

$$\xi \equiv 2$$

Atunci în situația a) dominantă este selfinteracția iar în cazul b) interacția vacuum cîmp.

Degenerările funcțiilor eliptice în perioadele imaginare corespund fie absenței interacției vacuum - cîmp, fie absenței selfinteracției. Soluția clasică „kink” (VI.101) obținută ca degenerare a aceleași funcții eliptice în perioadele reale va separa interacția de selfinteracție.

Toate aceste rezultate implică folosirea „mărimilor binare”. Potrivit

unui asemenea concept, orice mărime fizică măsurabilă se exprimă astfel [23,24]:

$$Q = R_e Q + i I_m Q \quad (\text{VI.103})$$

unde $R_e Q$ se referă la media mărimii iar $I_m Q$ la dispersia ei. Într-un asemenea context V va avea expresia:

$$V = R_e V + i I_m V$$

așa încît situația a) va corespunde amplificării cîmpului (va cuumul cedează energie cîmpului) iar b) absorbției cîmpului (cîmpul va ceda energie vacuumului). Rezultă un „exces de sarcină” ceea ce face ca și F să devină un cîmp cu sarcină de forma:

$$F = R_e F + i I_m F \quad (\text{VI.104})$$

Soluția „kink” este însă fără „sarcină”. Ori o cale de eliminare a „excesului de sarcină”, potrivit rezultatelor anterioare, este de-a „crea masă”. Cum singurul mecanism de-a „crea masă” într-un model cu rupere spontană de simetrie, așa cum este și modelul „Sine Gordon”, este mecanismul Higgs, atunci putem afirma că: *prin mecanismul Higgs cîmpul elimină „excesul de sarcină” de pe starea de vid fie prin absorbție de energie de la aceasta, fie prin cedare de energie de către acesta.*

BIBLIOGRAFIE

1. V.D.Bălan, *Teorii gauge Finsleriene și aplicații în studiul cîmpurilor fizice*. Teză de doctorat, Iași, 1992.
2. R.Miron și M.Anastasiu, *Fibrat vectoriale. Spații Lagrange. Aplicații în teoria relativității*, Ed.Academiei, 1987.
3. G.S.Asanov, *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*, D.Reidel, Dordrecht, 1985.
4. A.Bejancu, *Geometry of CR-Submanifold*, D.Reidel, Dordrecht, 1986.
5. A.Bejancu, *Finsler Geometry and Applications*, Ellis Horwood, New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, 1990.
6. T.Kawaguchi, R.Miron, *Tensor*, 48, 1989, p.52.
7. G.S.Asanov, T.Kawaguchi, *Tensor*, 49, 1990, p.99.

Lector: Brândușa BĂRDAȘ

Tehnoredactare computerizată:
A'92 srl, Tel&Fax 098-117522

*Culegerea textului
și tehnoredactarea:* Sabina CAZACU

Apărut: 1992
Format: 54 × 84/16
Coli tipo: 10,5
Bun de tipar: 24.11.1992

Editura **GRAPHIX**
str. Ștefan cel Mare nr. 2 bis
IAȘI - ROMÂNIA

Tiparul: **ROTA SRL**
executat sub. cda nr. 515



Str. Ștefan cel Mare 2Bis
6600 IAȘI * ROMÂNIA
Tel. 40-8-116981 * Fax 40-8-117631

LONDON Office
Phone 071-791-3171 * Fax 071-790-3564

«De ce, în definitiv, **Gravitația - Ple-**
doarie pentru o nouă teorie a spațiului
și timpului? Mai întâi, dintr-o *respec-*
tuoasă antipatie față de Einstein.
Respectuoasă: nu putem îndrăzni să
ne așezăm în tradiția - inaugurată de
marele El - cu Teoria Relativității Gene-
rale decât în postura discretă a unor
autori minori. *Antipatie*: sîntem aler-
gici la geometrizarea excesivă a spa-
țiului, la extrapolarea nejustificată a
interacției electromagnetice la alte
tipuri de interacție etc. Căci realita-
tea este unică, iar diversitatea mode-
lelor infinită.»

M.A.

ISBN 973-95723-3-2

Lei: 525